1. *(Pt. 16/66) Polárkoordináták bevezetésével számítsuk ki a* $\int\limits_0^1 \int\limits_y^{\sqrt{2-y^2}} 1\,dx\,dy$ *integrált!*

Megoldás: A tartományt két oldalról az $x = y$ egyenes és az $x^2 + y^2 = 2$ kör jobb oldali íve határolja. A $0 \le y \le 1$ feltétel ebből az első síknyolcadba eső nyolcadkört metszi ki. Polárkoordinátákkal a tartományt a $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ és $0 \le r \le \sqrt{2}$ egyenlőtlenségek határozzák meg. Így az integrál $\int\limits_0^1 \int\limits_y^{\sqrt{2-y^2}} 1\,dx\,dy = \int\limits_0^{\pi/4} \int\limits_0^{\sqrt{2}} 1 \cdot r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi/4} \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{\sqrt{2}} d\varphi = \int\limits_0^{\pi/4} 1\,d\varphi = \frac{\pi}{4}$. (Minthogy az 1 függvényt integráltuk, valójában a nyolcadkör területét számítottuk ki, ami tényleg $\frac{1}{8}(\sqrt{2})^2\pi = \frac{\pi}{4}$.)

2. *Számítsuk ki az* $f(x, y, z) = x^2+y^2$ *függvény integrálját a* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *kúp és az* $x^2+y^2+z^2 = 1$ *gömb által közrezárt tartományon hengerkoordinátákkal és gömbi koordinátákkal is!*

Megoldás: Hengerkoordinátákkal kifejezve a határoló felületek $m = r$ és $r^2 + m^2 = 1$, azaz $m = \sqrt{1 - r^2}$, mert a gömbnek csak a felső felét használjuk. A tartomány xy-síkra vett vetületét a metszetkör vetülete határolja: $m^2 = r^2 = 1 - r^2$-ből $r = 1/\sqrt{2}$. Tehát a vetület az $r \le \sqrt{2}$ körlap. Így az integrál:

$$\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_r^{\sqrt{1-r^2}} r^2 \cdot r\,dm\,d\varphi\,dr = \int\limits_0^{1/\sqrt{2}} \int\limits_0^{2\pi} r^3\sqrt{1-r^2} - r^4\,d\varphi\,dr = \pi \int\limits_0^{1/\sqrt{2}} 2r^3\sqrt{1-r^2} - 2r^4\,dr.$$

Az első integrált $1 - r^2 = u$, $-2r\,dr = du$ helyettesítéssel számítjuk ki:

$$\pi \int\limits_0^{1/\sqrt{2}} 2r^3\sqrt{1-r^2}\,dr = \pi \int\limits_1^{1/2} -(1-u)\sqrt{u}\,du = \pi \int\limits_1^{1/2} -u^{1/2} + u^{3/2}\,du =$$

$$\pi \left[-\frac{2}{3}u^{3/2} + \frac{2}{5}u^{5/2}\right]_1^{1/2} = \pi \cdot \frac{16 - 7\sqrt{2}}{60},$$

és ebből a teljes integrál

$$\pi \cdot \frac{16 - 7\sqrt{2}}{60} - \pi \left[\frac{2}{r^5}\right]_0^{1/\sqrt{2}} = \pi \cdot \frac{8 - 5\sqrt{2}}{30}.$$

A kúp félnyílásszöge 45°-os (mindegyik pontnak a magassága megegyezik a vetületének az origótól való távolságával), az integrálandó függvény pedig gömbi koordinátákra átírva $x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi = \rho^2 \sin^2\vartheta$, így az integrál:

$$\int\limits_0^{\pi/4} \int\limits_0^{1} \int\limits_0^{2\pi} \rho^2 \sin^2\vartheta \cdot \rho^2 \sin\vartheta\,d\varphi\,d\rho\,d\vartheta = \int\limits_0^{\pi/4} 2\pi \cdot \left[\frac{1}{5}\rho^5 \sin^3\vartheta\right]_0^1 d\vartheta =$$

$$\frac{2\pi}{5} \int\limits_0^{\pi/4} \sin\vartheta(1 - \cos^2\vartheta)\,d\vartheta = \frac{2\pi}{5}\left[-\cos\vartheta + \frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right]_0^{\pi/4} = \frac{2\pi}{5} \cdot \frac{-5\sqrt{2} + 8}{12} = \pi \cdot \frac{8 - 5\sqrt{5}}{30}.$$

3. *Keressünk alkalmas koordinátázást az* $x^2 + 4y^2 \le 4$ *tartományon való integráláshoz! Számítsuk ki az ehhez tartozó Jacobi-determinánst, és az* $f(x, y) = x^2$ *függvény integrálját!*

Megoldás: A megadott tartomány határa egy ellipszis, amelynek egyenlete átírható $(\frac{x}{2})^2 + y^2 = 1$ alakba, és ez $\frac{x}{2} = \cos t$, $y = \sin t$, vagyis $x = 2\cos t$, $y = \sin t$ egyenletekkel paraméterezhető. Ebből az ellipszislap paraméterezése $\mathbf{v}(u,t) = (2u\cos t,\ y = u\sin t)$, ahol $0 \le u \le 1$ és $0 \le t \le 2\pi$, tehát ha u,t-ra áttérve integrálunk, akkor az integrálás határai konstansok lesznek. A $\mathbf{v}$-hez tartozó Jacob-determináns $\begin{vmatrix} 2\cos t & -2u\sin t \\ \sin t & u\cos t \end{vmatrix} = 2u$, és az integrál

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 4u^2\cos^2 t \cdot 2u\,du\,dt = \int_0^{2\pi} \left[2u^4\cos^2 t\right]_0^1 dt = \int_0^{2\pi} 2\cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} 1 + \cos 2t\,dt =$$

$$\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

4. *Számítsuk ki a $\mathbf{v}(x,y) = (y, xy)$ függvény integrálját az $x^2 + y^2 = 4$ körön, pozitív irányban!*
Megoldás: A kört $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ alakban paraméterezhetjük, és ekkor $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$, míg $\mathbf{v}(2\cos t, 2\sin t) = (2\sin t, 4\cos t\sin t)$, tehát az integrál

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{v}(2\cos t, 2\sin t)\dot{\mathbf{r}}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} -4\sin^2 t + 8\sin t\cos^2 t\,dt =$$

$$\int_0^{2\pi} 2\cos 2t - 2 - 8(-\sin t)\cos^2 t\,dt = \left[\sin 2t - 2t - \frac{8}{3}\cos^3 t\,dt\right]_0^{2\pi} = -4\pi.$$

5. *Van-e potenciálfüggvénye az alábbi függvényeknek? Amelyiknek van, annak számítsuk ki az integrálját az $A(1,1,1)$-ből $B(0,-2,1)$ pontba menő szakaszon a potenciálfüggvény segítségével!*
a) $(yz, xz + 2y, xy)$;
b) (x, x, y).

Megoldás: a) A $\mathbf{v} = (yz, xz+2y, xy)$ függvénynek van potenciálfüggvénye, mert $\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz+2y & xy \end{vmatrix} = (x - x, y - y, z - z) = \mathbf{0}$. Ha ez a potenciálfüggvény $u(x,y,z)$, akkor $u_x = yz$, amiből $u = xyz + f(y,z)$ valamely f (x-től nem függő) függvényre. Az $u_y = xz + f_y(y,z) = xz + 2y$ feltételből $f_y(y,z) = 2y$, tehát $f(y,z) = y^2 + g(z)$ következik, ahol a g függvény már csak z-től függ. Végül $u_z = \frac{\partial}{\partial z}(xyz + y^2 + g(z)) = xy + g'(z) = xy$ miatt g konstans. Tehát $g = 0$ választással az $u(x,y,z) = xyz + y^2$ potenciálfüggvénye $\mathbf{v}$-nek, és így $\mathbf{v}$ integrálja a megadott görbén csak a végpontoktól függ: $u(B) - u(A) = 4 - 2 = 2$.

b) A $\mathbf{v} = (x, x, y)$ függvénynek nincs potenciálfüggvénye, mert $\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & x & y \end{vmatrix} = (1, 0, 1) \neq \mathbf{0}$.