1. *(18/63) Számítsuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x, -y, z)$ függvény integrálját a felfelé irányított $\mathcal{F}$: $\mathbf{r}(u, v) = (u + 2v,\ v,\ u - v)$, $(0 \le u \le 3,\ \ 0 \le v \le 1)$ felületen!*

Megoldás:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u &= (1, 0, 1)\\ \mathbf{r}_v &= (2, 1, -1)\\ \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= (-1, 3, 1)\\ \mathbf{v}(\mathbf{r}(u, v)) &= (u + 2v, -v, u - v)\\ \mathbf{v}(\mathbf{r}(u, v))(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) &= -6v\end{aligned}\quad .$$

(A $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ normálvektor fölfelé mutat, így nem kell az integrálban az ellentettjét venni.)

$$\int_0^1 \int_0^3 -6v\, du\, dv = -9.$$

2. *(18/67) Számítsuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}|\mathbf{r}|^3$ függvény integrálját az $\mathcal{F}$: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \ge 0$ felületen, lefelé mutató normálvektorokkal!*

Megoldás: A félgömbfelületet érdemes gömbi koordinátákkal paraméterezni: $\mathbf{r}(\varphi, \vartheta) = (2\cos\varphi\sin\vartheta, 2\sin\varphi\sin\vartheta, 2\cos\vartheta)$, ahol $0 \le \varphi \le 2\pi$ és $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$. Ezzel a paraméterezéssel

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_\varphi &= (-2\sin\varphi\sin\vartheta, 2\cos\varphi\sin\vartheta, 0)\\ \mathbf{r}_\vartheta &= (2\cos\varphi\cos\vartheta, 2\sin\varphi\cos\vartheta, -\sin\vartheta)\\ \mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\vartheta &= (-4\cos\varphi\sin^2\vartheta, -4\sin\varphi\sin^2\vartheta, -4\sin\theta\cos\theta)\end{aligned}\quad ,$$

és ez a normálvektor lefelé mutat, mert $-4\sin\theta\cos\theta \le 0$, ha $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$, így nem kell az ellenkezőjét venni az integrálban. A gömbfelületen $|\mathbf{r}| = 2$, így $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 8\mathbf{r} = (16\cos\varphi\sin\vartheta, 16\sin\varphi\sin\vartheta, 16\cos\vartheta)$, és $\mathbf{v}(\mathbf{r}(\varphi, \vartheta))\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\vartheta = -64\cos^2\varphi\sin^3\vartheta - 64\sin^2\varphi\sin^3\vartheta - 64\sin\vartheta\cos^2\vartheta = -64\sin^3\vartheta - 64\sin\vartheta\cos^2\vartheta = -64\sin\vartheta(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta) = -64\sin\vartheta$. Az integrál pedig

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} -64\sin\theta\, d\varphi\, d\vartheta = \int_0^{\pi/2} -128\pi\sin\vartheta\, d\vartheta = -128\pi.$$

3. *(18/78) A Stokes-tétel segítségével számítsuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2, z^2, x^2)$ függvény integrálját az $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ pontokat összekötő zárt töröttvonalon.*

Megoldás: A töröttvonal az $x+y+z = 1$ síkon fekvő ABC háromszöget zárja körül. A sík $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$ paraméterezéséből $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (1, 0, -1) \times (0, 1, -1) = (1, 1, 1)$ (és ez megfelelő irányba is mutat a Stokes-tételhez), és $\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = (-2z, -2x, -2y) = (-2 + 2x + 2y, -2x, -2y)$ a felületen. Az integrálási tartomány az ABC háromszög vetülete az xy-síkra, jelöljük ezt D-vel. Ekkor a kiszámítandó integrál $\iint_D (-2 + 2x + 2y, -2x, -2y)(1, 1, 1)\, dx\, dy = \iint_D -2\, dx\, dy$, és ez éppen az origó, A és B által határolt D háromszög területének -2-szerese, azaz -1. (A Stokes-tétel nélkül is ki lehet számítani az integrált: a három szakasz mindegyikén $-\frac{1}{3}$, összesen -1.

4. *Számítsuk ki a $\mathbf{v}(x,y) = (y, xy)$ függvény integrálját az $x^2+y^2=4$ körön pozítív irányban a Green-tétel segítségével!*

Megoldás: Ha D-vel jelöljük a körlapot, az integrál $\iint\limits_D \frac{\partial}{\partial x}v_2 - \frac{\partial}{\partial y}v_1\,dx\,dy = \iint\limits_D y-1\,dx\,dy =$
$\int\limits_0^2\int\limits_0^{2\pi}(r\sin\varphi-1)r\,d\varphi\,dr = \int\limits_0^2\left[-r^2\cos\varphi - r\varphi\right]_0^{2\pi}dr = \int\limits_0^2 -2\pi r\,dr = \left[-r^2\pi\right]_0^2 = -4\pi.$

5. *(18/90) Mi a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ függvény integrálja annak a tartománynak a teljes, kifelé irányított felületén, amelyet az $x^2+y^2=4$ hengerfelület és a $z=-1$, $z=2$ síkok határolnak?*

Megoldás: A Gauss–Osztrogradszkij-tételt használjuk. A $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \operatorname{div}(x,y,z) = 1+1+1=3$ függvényt kell a hengertartományon kiintegrálni. Mivel konstans függvényt integrálunk, a térfogat konstansszorosát kapjuk, ami ebben az esetben $3\cdot(3\cdot 2^2\pi) = 36\pi$. (Kifelé mutató normálvektorokkal volt irányítva a felület, így az előjelet nem kell megváltoztatni.)

6. *(18/94) Számítsuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x^2,y^2,z^2)$ függvény integrálját az $x^2+y^2+2z=1$ felület és a koordinátasíkok által határolt tartomány $\mathcal{F}$ felületén, kifelé mutató normálvektorokkal!*

Megoldás: A $\operatorname{div}\mathbf{v} = 2x+2y+2z$ függvényt kell integrálnunk a megadott térbeli tartományon. A tartomány a $z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2$ lefelé fordított forgási paraboloid belsejének a koordinátasíkok által határolt része. Ennek az xy-síkra vett vetülete éppen az xy-síkkal vett metszete, azaz az $x^2+y^2\le 1$ körlap első negyede, és a vetület mindegyik pontjára $0\le z\le \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2$. Hengerkoordinátákra átírva az integrált:

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}r^2}(2r\cos\varphi+2r\sin\varphi+2m)r\,dm\,d\varphi\,dr =$$

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^{\pi/2}\left[2r^2m\cos\varphi+2r^2m\sin\varphi+rm^2\right]_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}r^2}d\varphi\,dr =$$

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^{\pi/2}(r^2-r^4)\cos\varphi+(r^2-r^4)\sin\varphi+r(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}r^2)^2\,d\varphi\,dr =$$

$$\int_0^1\left[(r^2-r^4)\sin\varphi-(r^2-r^4)\cos\varphi+r(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}r^2)^2\varphi\right]_0^{\pi/2}dr =$$

$$\int\limits_0^1 2(r^2-r^4)+\tfrac{\pi}{2}r(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}r^2)^2\,dr = \left[\tfrac{2}{3}r^3-\tfrac{2}{5}r^5-\tfrac{\pi}{6}(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}r^2)^3\right]_0^1 = \tfrac{4}{15}+\tfrac{\pi}{48}.$$