1. *Oldjuk meg az alábbi állandó együtthatós, homogén, lineáris differenciálegyenleteket!*
a) (29/86-ból) $y'' + y' - 6y = 0$;
b) (29/41) $y'' + 4y' + 4y = 0$;
c) (29/55) $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Megoldás:

a) A karakterisztikus egyenlet $m^2 + m - 6 = 0$, azaz $(m-2)(m+3) = 0$, és ennek a 2 és -3 egyszeres gyökei, tehát a differenciálegyenlet általános megoldása $c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$.

b) A karakterisztikus egyenlet $m^2 + 4m + 4 = 0$, azaz $(m+2)^2 = 0$, és ennek a -2 kétszeres gyöke. A differenciálegyenlet megoldása $c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$.

c) A karakterisztikus egyenlet $m^2 + 4m + 13$, ennek két különböző gyöke van: $-2 \pm 3i$ (és így mindegyik egyszeres gyök). A $-2+3i$ gyökhöz a független $e^{-2x}\cos 3x$ és $e^{-2x}\sin 3x$ megoldások tartoznak (és a másik, konjugált gyökből is ezeknek a skalárszorosát kapnánk, tehát azzal nem is kell foglalkoznunk), amiből a differenciálegyenlet általános megoldása $c_1e^{-2x}\cos 3x + c_2e^{-2x}\sin 3x$.

2. *Milyen próbafüggvényt használnánk ahhoz az állandó együtthatós, inhomogén, lineáris differenciálegyenlethez, amelynek jobb oldalán a következő függvény áll? A karakterisztikus egyenlet milyen gyökei esetén kell még alkalmas x-hatvánnyal megszorozni a próbafüggvényt?*
a) $5x^2 - 1$ *b)* $x\cos 3x$ *c)* $e^{2x}\sin x$

Megoldás: a) $y_p = (Ax^2+Bx+C)x^s$, ha 0 s-szeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek.

b) $y_p = ((Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\sin 3x)x^s$, ha $3i$ s-szeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek.

c) $y_p = (Ae^{2x}\cos x + Be^{2x}\sin x)x^s$, ha $2+i$ s-szeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek.

3. *Oldjuk meg a következő speciális jobboldalú, inhomogén lineáris differenciálegyenleteket!*
a) (29/86) $y'' + y' - 6y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -\frac{1}{9}$;
b) $y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$.

Megoldás: a) A karakterisztikus egyenlet $m^2 + m - 6 = 0$, azaz $(m-2)(m+3) = 0$, és ennek a 2 és -3 egyszeres gyökei, tehát a homogén differenciálegyenlet általános megoldása $c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$. Az inhomogénhez tartozó próbafüggvény $y_p = Ax + B$. Deriválás és behelyettesítés után azt kapjuk, hogy $-6Ax + (A - 6B) = x$ mint függvény, így $A = -\frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{36}$, amiből az inhomogén egyenlet általános megoldása $y = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{36} + c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$. A kezdeti feltételeket ebbe és az $y' = -\frac{1}{6} + 2c_1e^{2x} - 3e^{-3x}$ függvénybe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $-\frac{1}{36} + c_1 + c_2 = 0$ és $-\frac{1}{6} + 2c_1 - 3c_2 = -\frac{1}{9}$, amiből $c_2 = 0$ és $c_1 = \frac{1}{36}$, tehát a kezdetiérték-probléma megoldása $-\frac{1}{6}x - \frac{1}{36} + \frac{1}{36}e^{2x}$.

b) A karakterisztikus egyenlet $m^2+4m+4 = 0$, azaz $(m+2)^2 = 0$, és ennek a -2 kétszeres gyöke. A homogén differenciálegyenlet megoldása $c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$, az inhomogénhez tartozó próbafüggvény pedig $y_p = (Ax+B)e^{-2x} \cdot x^2 = (Ax^3 + Bx^2)e^{-2x}$. Deriválás és behelyettesítés után azt kapjuk, hogy $(6Ax + 2B)e^{-2x} = xe^{-2x}$ mint függvény, így $A = \frac{1}{6}$ és $B = 0$. Ebből a megoldás: $y = \frac{1}{6}x^3e^{-2x} + c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$.

4. *Diagonalizáljuk az* $A = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ *mátrixot, és ennek segítségével számítsuk ki az* e^A *és — ha van ilyen — a* $\sqrt{A}$ *mátrixot. (Hány lehetséges értéke van a* $\sqrt{A}$*-nak?)*

Megoldás: A mátrix karakterisztikus polinomja $|A - xI| = x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$, így a sajátértékei 1 és 4. Az 1-hez tartozó sajátvektorok a $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor, a 4-hez tartozók pedig a $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor nemnulla skalárszorosai. A $\{(-1,1),(-2,1)\}$ bázisra való áttérés mátrixa $P = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, és ezzel a P-vel $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, azaz $A = PDP^{-1}$, ahol $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Az e^x Taylor-sorba fejthető függvény, így a diagonális mátrixra úgy alkalmazhatjuk, hogy a d_i diagonális elemek helyébe a d_i-beli függvényértéket írjuk, és $e^A = Pe^DP^{-1} = P\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e^4 \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} -e+2e^4 & -2e+2e^4 \\ e-e^4 & 2e-e^4 \end{bmatrix}$.

A $\sqrt{x}$ függvényt nem tudjuk Taylor-sorba fejteni 0 körül (és más helyen sem úgy, hogy mindenütt konvergens legyen), így nem alkalmazzuk rá a fenti módszert. Viszont a $B^2 = A$ mátrixegyenletet megoldhatjuk a diagonális alak segítségével: ez ekvivalens azzal, hogy $(P^{-1}BP)^2 = P^{-1}AP = D$. Legyen $P^{-1}BP = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Ekkor $\begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, amiből $b(a+d) = c(a+d) = 0$ miatt vagy $d = -a$, de akkor $1 = a^2+bc = d^2+bc = 4$ ellentmondás; vagy $b = c = 0$. Az utóbbi esetben $a = \pm 1$ és $d = \pm 2$, tehát négy különböző négyzetgyöke van az A mátrixnak, és ezek a $P\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{bmatrix}P^{-1}$ képletből $\pm\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ és $\pm\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$. (Bár ebben az esetben mégis megkaptuk úgy a megoldásokat, hogy a diagonális alak átlós elemeit kicseréltük az $x^2 = d_i$ lehetséges megoldásaira, az $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix négyzetgyökeit például nem mind kapnánk meg ilyen alakban: egyik négyzetgyöke $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, és végtelen sok különböző négyzetgyöke van.)

5. *Legyen* $J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. *Számítsuk ki az* e^{tJ}, J^5 *és* $\cos J$ *mátrixokat!*

Megoldás: Ha J egy λ sajátértékhez tartozó $k \times k$-as Jordan-blokk, akkor $f(J)$ első sorában $f(\lambda)$, $\frac{1}{1!}f'(\lambda)$, $\frac{1}{2!}f''(\lambda)$, ..., $\frac{1}{(k-1)!}f^{(k-1)}(\lambda)$ áll, és ezeket jobbra eltolva ismételjük (feltéve, hogy $f(x)$ Taylor-sorba fejthető, és az konvergens minden x-re. Az első esetben az $f(x) = e^{tx}$, és erre $f'(x) = te^{tx}$, $f''(x) = t^2e^{tx}$, tehát a mátrix első sora $(e^{3t},\ \frac{1}{1!}te^{3t},\ \frac{1}{2!}t^2e^{3t})$. A második esetben $f(x) = x^5$, $f'(x) = 5x^4$ és $f(x) = 20x^3$, amiből a mátrix első sora $(3^5,\ 5\cdot 3^4,\ \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 3^3)$. A harmadik függvény $f(x) = \cos x$, amire $f'(x) = -\sin x$ és $f''(x) = -\cos x$, így a mátrix első sora $(\cos 3,\ -\sin 3,\ -\frac{1}{2}\cos 3)$.

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} & \frac{1}{2}t^2e^{3t} \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \quad J^5 = \begin{bmatrix} 243 & 405 & 270 \\ 0 & 243 & 405 \\ 0 & 0 & 243 \end{bmatrix} \quad \cos J = \begin{bmatrix} \cos 3 & -\sin 3 & -\frac{1}{2}\cos 3 \\ 0 & \cos 3 & -\sin 3 \\ 0 & 0 & \cos 3 \end{bmatrix}$$