1. *a) Alakítsuk differenciálegyenlet-rendszerré az $y''' - 2y'' + y' + 5y = 0$ differenciálegyenletet!*

b) Alakítsuk magasabbrendű differenciálegyenletté az $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ differenciálegyenlet-rendszert!

Megoldás: a) Legyen $y_1 = y$, $y_2 = y'$ és $y_3 = y''$. Ekkor az egyenlet azzal ekvivalens, hogy $y_3' = 2y_3 - y_2 - 5y_1$. Tehát az $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ vektorra $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

b) Kiírva a két egyenletet: $\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2$ és $\dot{x}_2 = -x_1 + x_2$. Az elsőből kifejezzük x_2-t: $x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}\dot{x}_1$, majd behelyettesítjük a másodikba: $-\frac{1}{2}\dot{x}_1 + \frac{1}{2}\ddot{x}_1 = -x_1 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}\dot{x}_1$, azaz $\ddot{x}_1 - 2\dot{x}_1 + 3x_1 = 0$

2. *Hozzuk Jordan-normálalakra a $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ mátrixot, és adjunk is meg $\mathbb{R}^2$-ben egy olyan bázist, amelyben A Jordan-alakú! Ezt felhasználva írjuk fel az $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását!*

Megoldás: $k_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ -4 & -3-x \end{vmatrix} = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, így -1 az A mátrix egyetlen sajátértéke. A $B = A + I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ mátrix 1 rangú, ezért a -1-hez tartozó sajátaltér $2 - 1 = 1$ dimenziós, és ebből adódóan a Jordan-normálalak $J = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. A J-hez tartozó bázisban a $B = A + I$ mátrix $J + I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ alakú, vagyis olyan $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ báziselemeket keresünk, amelyre $\mathbf{b}_2 \overset{B}{\mapsto} \mathbf{b}_1 \overset{B}{\mapsto} \mathbf{0}$. A $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenlet egyik megoldása megfelel $\mathbf{b}_1$-nek: $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, a $B\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ egyik megoldása pedig $\mathbf{b}_2$-nek: $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tehát $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$-re $P^{-1}AP = J$. A differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása

$$\mathbf{x} = Pe^{Jt}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -(t+1)e^{-t} \\ (2t+1)e^{-t} \end{bmatrix}.$$

3. *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszereket!*

a) $\begin{array}{rcrcr} \dot{x}_1 & = & 4x_1 & - & 5x_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_1 & - & 2x_2 \end{array}$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$.

b) $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, *ahol* $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, *ahol* $P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, *és* $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Megoldás: a) A differenciálegyenlet-rendszer mátrixos alakja $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. A mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = -1$, ezekhez egy-egy sajátvektor $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Így a mátrix diagonalizálható, és a differeciálegyenlet-rendszer megoldása $c_1\mathbf{v}_1e^{\lambda_1 t}+c_2\mathbf{v}_2e^{\lambda_2 t} = c_1\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}e^{3t}+c_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{-t}$. A kezdeti feltételt behelyettesítve azt kapjuk, hogy $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, azaz $1=5c_1+c_2$ és $2=c_1+c_2$, tehát $c_1=-\frac{1}{4}$, $c_2=\frac{9}{4}$, és a kezdetiérték-probléma megoldása $x_1=-\frac{5}{4}e^{3t}+\frac{9}{4}e^{-t}$ és $x_2=-\frac{1}{4}e^{3t}+\frac{9}{4}e^{-t}$.

b) Az A mátrix sajátértékei $\lambda_{1,2}=-1\pm i$, egy-egy sajátvektora pedig $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}$ és $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-i\\1\end{bmatrix}$. Ebből az $\mathbf{x}=c_1\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}e^{(-1+i)t}+c_2\begin{bmatrix}-i\\1\end{bmatrix}e^{(-1-i)t}$ komplex értékű, de valós és képzetes része megadja a valós megoldásokat: $\operatorname{Re}\mathbf{x}+\operatorname{Im}\mathbf{x}=(c_1+c_2)\begin{bmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}e^{-t}+(c_1-c_2)\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\end{bmatrix}e^{-t}=\tilde{c}_1\begin{bmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}e^{-t}+\tilde{c}_2\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\end{bmatrix}e^{-t}$.

c) A megoldás

$$\mathbf{x}=Pe^{Jt}\mathbf{c}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{2t}&te^{2t}&0\\0&e^{2t}&0\\0&0&e^{t}\end{bmatrix}\mathbf{c}=\begin{bmatrix}e^{2t}&(t+1)e^{2t}&0\\-e^{2t}&(-t+1)e^{2t}&0\\0&e^{2t}&e^{t}\end{bmatrix}\mathbf{c}=$$
$$c_1\begin{bmatrix}e^{2t}\\-e^{2t}\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}(t+1)e^{2t}\\(-t+1)e^{2t}\\e^{2t}\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\0\\e^{t}\end{bmatrix}.$$

4. *Keressünk egy partikuláris megoldást az* $\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+\begin{bmatrix}e^t\\1\end{bmatrix}$ *inhomogén differenciálegyenlet-rendszerhez, ha* $A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&-2\end{bmatrix}$.

Megoldás: Az inhomogén tagot $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}e^t+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ összegre bontjuk (ahol az exponenciális rész és a trigonometrikus rész ugyanolyan), és ezekhez külön-külön keresünk megoldást. A sajátértékei 0 és -1, tehát az első függvényhez tartozó próbafüggvényben a polinomok legföljebb nulladfokúak, a második részhez tartozók viszont 0-adfokú helyett legföljebb elsőfokúak. Így az első próbafüggvény $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}e^t$, a második $\mathbf{z}=\begin{bmatrix}at+b\\ct+d\end{bmatrix}$. Az elsőt behelyettesítve az $\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+\begin{bmatrix}e^t\\0\end{bmatrix}$ differenciálegyenlet-rendszerbe az $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}e^t=\begin{bmatrix}a-b+1\\2a-2b\end{bmatrix}e^t$ egyenlőséget kapjuk, amiből $a=\frac{3}{2}$ és $b=1$, tehát $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}3/2\\1\end{bmatrix}e^t$. A másodikat behelyettesítve $\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(a-c)t+(b-d)\\(2a-2c)t+(2b-2d+1)\end{bmatrix}$, amiből az

$$\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\2&0&-2&0\\1&-1&0&-1\\0&-2&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

egyenletrendszert kapjuk, és ennek egyik megoldása: $a=-1$, $b=-1$, $c=-1$, $d=0$, vagyis $\mathbf{z}=\begin{bmatrix}-t-1\\-t\end{bmatrix}$. Tehát $\mathbf{x}=\mathbf{y}+\mathbf{z}=\begin{bmatrix}-t-1+\frac{3}{2}e^t\\-t+e^t\end{bmatrix}$ az inhomogén differenciálegyenletrendszer egyik megoldása (és ebből a homogén megoldásainak hozzáadásával megkapjuk az összeset).

5. *Határozzuk meg az* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ *mátrix sajátértékeit és azok multiplicitását a karakterisztikus polinomban. Milyen alakban kereshető ennek alapján az* $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ *homogén differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása?*

Megoldás: $k_A(x) = -(x-1)^2(x-2)$, tehát a sajátértékek 1 és 2, és ebből az 1 2-szeres multiplicitású $k_A(x)$-ben. A differenciálegyenlet-rendszer megoldása eszerint $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \\ a_3 t + b_3 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} e^{2t}$ alakú.