1. zh

1. Egy szavazáson a házaspárok részvételi arányáról a következő adataink vannak. Annak a valószínűsége, hogy szavaz a férj, $\frac{3}{5}$, hogy szavaz a feleség, $\frac{1}{2}$. Azon feleségek között, ahol a férj szavaz, a feleség $\frac{2}{3}$ valószínűséggel szavaz.

a) Ha egy házaspárról csak azt tudjuk, hogy a feleség szavaz, mi a valószínűsége, hogy a férje is szavaz?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy egyikük se megy el szavazni? (*8 pont*)

2. Egy szabályos pénzérmét 6-szor feldobunk. ξ értéke a fej-írás dobások számának eltérése (abszolút értékben). Adjuk meg ξ valószínűségeloszlását és várható értékét! (*8 pont*)

3. A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_\xi(x) = \begin{cases} -1/x & \text{ha } x \le -4 \\ \frac{1}{16}x + \frac{3}{4} & \text{ha } -4 < x \le 4 \\ 1 & \text{ha } 4 < x \end{cases}$$

Adjuk meg a $P(-8 < \xi < 2)$ és $P(\xi = 4)$ valószínűségeket! (*4 pont*)

2. zh

1. A ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlását a táblázat mutatja. Határozzuk meg a $\xi + \eta$ valószínűségi változó eloszlását, és ξ és η kovarianciáját! (*6 pont*)

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
-1	0.05	0.1	0.2
0	0.05	0.2	0.1
1	0.2	0.05	0.05

2. Annak az esélye, hogy adott típusú fénycső 2000 óránál tovább világít, $1/e$. A fénycső élettartamát exponenciális eloszlásúnak tekintjük.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy fénycső 1600 óránál tovább működik?

b) Ha egy teremben 20 fénycső van, melyek állandóan be vannak kapcsolva, mennyi a valószínűsége, hogy 1600 óra alatt legfeljebb 1 fénycsövet kell cserélni?

c) Ha egy szobában egy fénycső van, mennyi a valószínűsége, hogy 10 év alatt legföljebb 36-szor kell cserélni? (Használjuk a centrális határeloszlástételt, és számítsuk mindegyik évet 365 naposnak!)

(*4+4+6 pont*)

3. zh

1. Határozzuk meg az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ lineáris leképezés magterének és képterének egy-egy bázisát, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(*5 pont*)

2. Adjuk meg a valós sík $f : \mathbf{r} \mapsto (\mathbf{ra})\mathbf{a} + \mathbf{r}$ transzformációjának a standard A mátrixát, sajátértékeit és sajátvektorait, ha $\mathbf{a} = (1, 1)$. A $D = P^{-1}AP$ diagonális alak segítségével számítsuk ki az $A^n = PD^nP^{-1}$ hatványt! (*11 pont*)

3. Adjuk meg az alábbi Jordan-mátrix karakterisztikus polinomját, minimálpolinomját, és a sajátaltereinek a dimenzióját!

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(*4 pont*)

4. zh

1. Az f szimmetrikus bilineáris függvény standard mátrixa $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$.

a) Mi az $f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ értéke az $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$ és $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ vektorokra?

b) Határozzuk meg az f bilineáris függvény jellegét (milyen definit?)! (*4 pont*)

2. Határozzuk meg az $f(x, y, z) = 2xy - x^2 - 2y^2 - z^2 + z + y$ függvény lokális szélsőértékhelyeit! (*8 pont*)

3. Mi az $f(x, y) = x^2 - y$ függvény legnagyobb és legkisebb értéke az $x^2 + y^2 = 1$ körön? (*8 pont*)

5. zh

1. Adjuk meg a $\mathbf{v}(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) = (u, vu^2)$ koordinátázáshoz tartozó $\operatorname{Grad} \mathbf{v}$ mátrixot, és a determinánsát. Írjuk át az $\int_0^1 \int_{-x^2}^{x^2} \sqrt{x^2 - y}\, dy\, dx$ integrált (u, v) koordinátákra! Az integrált nem kell kiszámolni. (*6 pont*)

2. Számítsuk ki a $\mathbf{v}(x, y, z) = (2xy, x^2, 1)$ függvény görbementi integrálját a $\mathcal{G}: \ \mathbf{r}(t) = (\cos t,\ 1,\ t)$ $(0 \leq t \leq \pi/2)$ görbén! (*6 pont*)

3. Számítsuk ki a $\mathbf{v}(x + y, yz, z)$ függvény felületmenti integrálját a $z = x^2 + y^2$ és $z = 4$ felületek által határolt tartomány teljes felületén, befelé mutató normálvektorokkal! (*8 pont*)

6. zh

1. Oldjuk meg az $y^{(4)} + 4y'' = 3x - 1$ differeciálegyenletet! (*7 pont*)

2. Oldjuk meg az $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ kezdetiérték-problémát! (*8 pont*)

3. Legyen $P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ahol $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Írjuk fel az $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ differeciálegyenlet-rendszer megoldását. (*5 pont*)