1. Bizonyítsuk be, hogy az R fölötti $n \times n$-es mátrixok $M_n(R)$ gyűrűjének centruma azokból a $\lambda \cdot I$ alakú mátrixokból áll, ahol $\lambda \in Z(R)$, és így $Z(M_n(R)) \cong Z(R)$.

2. (**Hf**) Tegyük fel, hogy $R = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$, ahol minden P_i direkt felbonthatatlan modulus. Nevezzük P_i-t és P_j-t szomszédosnak, ha $\operatorname{Hom}(P_i, P_j) \neq 0$ vagy $\operatorname{Hom}(P_j, P_i) \neq 0$, és legyenek $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_t$ az így kapott gráf összefüggő komponensei. Bizonyítsuk be, hogy $\oplus \{ P_i \mid P_i \in \mathcal{K}_j \}$ direkt felbonthatatlan ideálja R-nek minden j-re, és R ezeknek a direkt felbonthatatlan gyűrűknek a direkt összege.

3. Bizonyítsuk be, hogy R_R maximális részmodulusainak metszete, $J(R)$ annullál minden egyszerű jobb modulust.

4. Legyen A véges dimenziós algebra. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek A tetszőleges J jobbideáljára.

(i) J nilpotens;
(ii) J annullál minden egyszerű jobb A-modulust;
(iii) minden véges kompozícióláncú jobb A-modulust annullál J-nek egy alkalmas hatványa.

5. Bizonyítsuk be, hogy $J(A)$ az A legnagyobb nilpotens jobbideálja, azaz $J(A)$ maga nilpotens, és tartalmaz minden nilpotens jobbideált.

6. Lássuk be, hogy egy R gyűrűben egy a elem akkor és csak akkor van benne egy nilpotens jobbideálban, ha egy nilpotens balideálban is benne van.

7. Bizonyítsuk be, hogy $J(A) \triangleleft A$, és ugyanezt az ideált kapnánk, ha maximális balideálok metszeteként definiálnánk.

8. Bizonyítsuk be, hogy $J(A)$ a legkisebb olyan ideál A-ban, amelyre $A/J(A)$ féligegyszerű.

9. Bizonyítsuk be, hogy $J(A/J(A)) = 0$.

10. (**Hf**) Legyen $\operatorname{rad} M$ az M modulus maximális részmodulusainak metszete. Bizonyítsuk be, hogy véges dimenziós A algebra fölött $\operatorname{rad} M = MJ(A)$, és ha M végesen generált, akkor $U \leq M$, $U + \operatorname{rad} M = M$ esetén $U = M$.

11. Bizonyítsuk be, hogy egy p-hatványrendű csoport p karakterisztikájú test fölötti csoportalgebrájának Jacobson-radikálja azokból az elemekből áll, amelyeknél az együtthatók összege 0.

12. (**Hf**) Bizonyítsuk be, hogy egy 28 elemű nem kommutatív csoportnak van másodfokú irreducibilis reprezentációja $\mathbb{C}$ fölött.