1. Legyen $I \lhd R$. Bizonyítsuk be, hogy ha minden $x \in I$-re $1-x$ jobb invertálható R-ben (azaz I jobb kvázireguláris), akkor minden $x \in I$-re $1-x$ invertálható is (azaz I kvázireguláris).

Egy X részmodulus kicsi M-ben ($X << M$), ha minden $Y \leq M$-re $X + Y = M$-ből következik, hogy $Y = M$.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $Y \leq X << M$ és $Z \leq M$, akkor
a) $Y << M$;
b) $\overline{X} << M/Z$.

3. Bizonyítsuk be, hogy minden 1-elemes R gyűrűben igazak az alábbiak.
a) $J(R) \lhd R$.
b) $J(R) << R_R$.
c) $J(R) = \{ x \in R \mid 1 - rxs \text{ invertálható } \forall r, s \in R \}$.
d) $J(R)$ ugyanaz, ha maximális jobbideálok vagy maximális jobbideálok metszeteként definiáljuk.

4. Adjunk példát olyan
a) R gyűrűre, amelyre $R/J(R)$ nem féligegyszerű;
b) R gyűrűre, amelyre $J(R)$ nem nilpotens;
c) olyan M_R modulusra, amelyre $\operatorname{rad} M$ nem kicsi M-ben.

5. (**Hf**)
a) Legyen $\alpha : M \to N$ modulus-homomorfizmus. Bizonyítsuk be, hogy $(\operatorname{rad} M)\alpha \leq \operatorname{rad} N$.
b) Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{rad}(\bigoplus_{i\in I} M_i) = \bigoplus_{i\in I} \operatorname{rad} M_i$.

6. Bizonyítsuk be a Fitting-lemmát, azaz, hogy ha M maximum- és minimumfeltételes modulus, és $\varphi \in \operatorname{End}(M)$, akkor van olyan n, amelyre $M = \operatorname{Ker} \varphi^n \oplus \operatorname{Im} \varphi^n$.

7. Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_2 S_3 \cong \mathbb{Z}_2 D_3$ csoportalgebra direkt felbonthatatlan projektív modulusait.

8. (**Hf**) Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_3 S_3$ csoportalgebra Jacobson-radikálját. Hány direkt felbonthatatlan projektív modulusa van $\mathbb{Z}_3 S_3$-nak, és ezek hány dimenziósak?