1. *Keressük meg C_3 irreducibilis reprezentációit egy tetszőleges K test fölött! Határozzuk meg KC_3 részmodulusait, ha K karakterisztikája 3.*

Megoldás: C_3 reprezentációi $GL(V)$-be menő csoport-homomorfizmusok. A reprezentációt meghatározza a C_3 generátorelemének a képe: egy olyan A mátrix, amelyre $A^3 = I$. Ahhoz, hogy a reprezentáció irreducibilis legyen, az kell, hogy V-nek ne legyen A-invariáns valódi altere. Legyen $m(x)$ az A minimálpolinomja. $A^3 = I$ miatt $m(x) \mid x^3 - 1$. Ha $m(1) = 0$, akkor 1 sajátértéke A-nak, tehát A-nak van sajátvektora, és az ez által generált altér A-invariáns, azaz ekkor $\dim V = 1$, és A triviálisan hat rajta. $\operatorname{char} K = 3$ esetén $x^3 - 1 = (x-1)^3$, ezért ekkor más irreducibilis reprezentáció nincs is.

Tegyük fel most, hogy $\operatorname{char} K \neq 3$ és $m(1) \neq 0$. Ekkor $m(x) \mid x^2+x+1$. Ha x^2+x+1 reducibilis K fölött, akkor a gyökei különbözőek (ugyanis $x^3 - 1$-nek sincs többszörös gyöke 3-tól különböző karakterisztika esetén, mert $x^3 - 1$ relatív prím a deriváltjához), és mindkét sajátértékhez tartozik egy egydimenziós reprezentáció. Ekkor C_3-nak három elsőfokú reprezentációja van.

Ha x^2+x+1 irreducibilis K fölött, akkor tetszőleges $v \in V$-re a v és vA által generált altér A-invariáns (ui. $vA^2 = -v - vA$), és ennek már nincs A-invariáns altere, mert akkor A-nak lenne sajátvektora. Tehát ilyenkor $\dim V = 2$, és ilyen reprezentáció valóban létezik: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Több irreducibilis reprezentáció nem lehet, mert $1 + 2 = \dim \mathbb{C}C_3$.

3 karakterisztikájú K test esetén KC_3 minimális részmodulusa csak olyan $x+ya+za^2$ elemekből állhat (ahol $C_3 = \langle a \rangle$), amelyekre $(x+ya+za^2)a = z+xa+ya^2 = x+ya+za^2$, azaz $x = y = z$, mert KC_3 egyetlen irreducibilis modulusa a triviális modulus. Tehát $M_1 = \{\, \lambda(1+a+a^2) \mid \lambda \in K \,\}$ az egyetlen minimális részmodulus KC_3-ban, efölött maximális modulus pedig szintén csak egy van, ugyanis csak olyan u elemek lehetnek benne, amelyekre $ua - u \in M_1$, hogy M_2/M_1 triviális egyszerű modulus legyen, és ilyenek csak azok az $x + ya + za^2$ elemek, amelyekre $x + y + z = 0$.

2. *Mikor ekvivalens két lineáris (azaz egydimenziós) reprezentáció?*

Megoldás: Csak akkor, ha egyenlők. Ugyanis $GL_1(K) \cong K^\times$, és ez kommutatív, tehát a konjugált elemek egyenlők is.

3. *Hány különböző lineáris reprezentációja van $\mathbb{C}$ fölött egy G csoportnak?*

Megoldás: Egy lineáris reprezentáció $\mathbb{C}^\times$-ba menő csoport-homomorfizmus. Mivel $\mathbb{C}^\times$ kommutatív, a homomorfizmus magja tartalmazza G'-t, tehát megfelel egy G/G'-ből menő homomorfizmusnak. G/G' ciklikus csoportok direkt szorzata a véges Abel-csoportok alaptétele miatt, és a generátorelemek minden olyan $\mathbb{C}^\times$-be menő leképezése kiterjeszthető homomorfizmussá, ahol a kép rendje osztója az elem rendjének. Így $C_{n_1} \times \ldots \times C_{n_r}$-ből $n_1 n_2 \cdots n_r$ különböző homomorfizmus megy $\mathbb{C}^\times$-be, vagyis G-nek $|G/G'|$ különböző lineáris reprezentációja van $\mathbb{C}$ fölött.

4. *Bizonyítsuk be, hogy egy Abel-csoportnak minden $\mathbb{C}$ fölötti irreducibilis reprezentációja lineáris!*

Megoldás: A lineáris reprezentációk nyilvánvalóan irreducibilisek. A 3. feladat szerint egy G Abel-csoportnak $|G|$ lineáris reprezentációja van. De tudjuk, hogy az irreducibilis reprezentációk fokának összege nem nagyobb $\mathbb{C}G$ dimenziójánál, azaz $|G|$-nél, tehát más irreducibilis reprezentációja nincs is G-nek.

5. *Adjuk meg $C_2 \times C_2$ irreducibilis reprezentációit egy tetszőleges K test fölött!*

Megoldás: $C_2 \times C_2$ homomorfizmusait $GL(V)$-be megadja a két komponens generátorelemének homomorf képe, A és B, azaz olyan mátrixpár, amelyre $A^2 = B^2 = I$ és $AB = BA$. A és B minimálpolinomja osztója $x^2 - 1$-nek, tehát mindenképpen van K-ban sajátértékük. Legyen V_1 az A-nak egy sajátaltere. $AB = BA$ miatt ez B-invariáns: $vA = \lambda v$ esetén $(vB)A = v(BA) = v(AB) = (vA)B = \lambda vB$. Ebben B-nek van sajátvektora is, ismét a $B^2 = I$ feltétel miatt, tehát van A-nak és B-nek közös sajátvektora, azaz V-nek egydimenziós $C_2 \times C_2$-invariáns altere. Így az irreducibilis reprezentáció csak egydimenziós lehet, azaz $\mathbb{C}^\times$-be vezető homomorfizmus. Ez mindkét generátor elemet 1-be vagy -1-be viheti, és ezek valóban homomorfizmust adnak, tehát $\operatorname{char} K = 2$ esetén egyetlen, egydimenziós irreducibilis reprezentáció van, minden más esetben négy.

6. (**Hf**) *Határozzuk meg $\mathbb{Z}_2(C_2 \times C_2)$ részmodulusait! Rajzoljuk föl a részmodulushálóját!*

7. *Határozzuk meg a kvaterniócsoport valós irreducibilis reprezentációit!*

Megoldás: $Q/Z(Q) \cong C_2 \times C_2$, tehát Q-nak 4 lineáris reprezentációja van (ld. 5. feladat). Emellett Q-nak természetesen adódó 4-dimenziós reprezentációját adja a kvaterniók $\mathbb{H}$ ferdeteste. Ez utóbbi $\mathbb{R}Q$-nak az $1 + (-1)$ elem által generált ideállal vett faktora, és mivel ferdetest, egyszerű $\mathbb{R}Q$-modulus is. Több irreducibilis modulus nem lehet, mert $4 \cdot 1 + 4 = 8 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}Q$.

8. *Legyen S_R egy R fölötti egyszerű modulus és $E = \operatorname{End}(S_R)$. Bizonyítsuk be, hogy*
a) E ferdetest;
b) ha R egy K-algebra, akkor $K \leq E$;
*c) (**Hf**) ha R egy véges dimenziós K-algebra és K algebrailag zárt, akkor $E = K$.*
d) Igaz-e, hogy ha $\operatorname{End}(M_R)$ ferdetest, akkor M egyszerű?*

Megoldás: a) Az S egyszerű modulus tetszőleges endomorfizmusának magja vagy az egész S, és akkor az endomorfizmus 0, vagy a mag 0, és akkor a kép nem nulla, így csak az egész modulus lehet, tehát ez az endomorfizmus invertálható.

b) A K-beli elemekkel való szorzások nyilván endomorfizmusok.

d) Nem igaz. Legyen R a 2×2-es valós felső háromszögmátrixok gyűrűje, M pedig az a 2-dimenziós vektortér, amin ez hat. Ekkor $\operatorname{End}(M_R)$ azokból a 2×2-es mátrixokból áll, amelyek felcserélhetők a felső háromszögmátrixokkal. Ha $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \in \operatorname{End}(M_R)$, akkor $\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A = A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A = A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$ miatt A skalármátrix, tehát $\operatorname{End}(M_R) \cong \mathbb{R}$. Viszont M nem egyszerű: az első báziselem által generált altér részmodulus is.

9. *Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{End}(R_R) \cong R$, ha az endomorfizmusokat balról írjuk.*

Megoldás: Az r elemeivel való balszorzások nyilvánvalóan modulushomomorfizmusok, és különbözők, mert $1 \in R$. Másrészt tetszőleges φ homomorfizmusra, ha $\varphi(1) = a$, akkor $\varphi(r) = \varphi(1 \cdot r) = \varphi(1)r = ar$, így φ az a-val való balszorzás.

10. *a)* (**Hf**) *Bizonyítsuk be, hogy ha* $N \cong R_R/M$*, akkor*

$$\mathrm{Ann}(N) = \{\, r \in R \mid xr = 0 \ \forall\ x \in N \,\}$$

R-nek az M-ben levő legnagyobb kétoldali ideálja.

b) Legyen R kommutatív, és tegyük föl, hogy R-nek izomorfia erejéig egyetlen irreducibilis modulusa van. Igazoljuk, hogy R_R*-nek egyetlen maximális ideálja van.*

Megoldás:

b) Minden egyszerű modulus előáll R_R homomorf képeként. Ha M_1 és M_2 maximális ideálok (persze jobbideálként is maximálisak R kommutativitása miatt), akkor az a) rész miatt ezek az R/M_1 és R/M_2 egyszerű modulusok annullátorai is. De a feltétel miatt $R/M_1 \cong R/M_2$, és így az annullátoraik, azaz M_1 és M_2 is megegyeznek.

A **Hf**-*fel jelölt házi feladatok beadási határideje szeptember 17.*