1. *Bizonyítsuk be, hogy az R fölötti $n \times n$-es mátrixok $M_n(R)$ gyűrűjének centruma azokból a $\lambda \cdot I$ alakú mátrixokból áll, ahol $\lambda \in Z(R)$, és így $Z(M_n(R)) \cong Z(R)$.*

Megoldás: Ha A egy R fölötti $n \times n$-es mátrix, és E_{ij} azt a mátrixot jelöli, amelynek egyetlen nem nulla eleme az ij helyen levő 1, akkor $E_{ij}A$-nak egy nem nulla sora van: az i. sorban az A j-edik sora áll, AE_{ij}-nek pedig egyetlen nem nulla oszlopa a j., ahova A i-edik oszlopa kerül. A kettő egyenlőségéből következik, hogy $a_{ji} = 0$ és $a_{ii} = a_{jj}$ minden $i \neq j$-re, vagyis $A = \lambda I$ alakú skalármátrix, $\lambda \in R$-re. A skalármátrixok részgyűrűje izomorf R-rel, így a centrumban ezek közül csak a $\lambda \in Z(R)$-hez tartozók vannak. Az nyilvánvaló, hogy ezek valóban mindegyik mátrixszal felcserélhetők.

2. *(**Hf**) Tegyük fel, hogy $R = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$, ahol minden P_i direkt felbonthatatlan modulus. Nevezzük P_i-t és P_j-t szomszédosnak, ha $\mathrm{Hom}(P_i, P_j) \neq 0$ vagy $\mathrm{Hom}(P_j, P_i) \neq 0$, és legyenek $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_t$ az így kapott gráf összefüggő komponensei. Bizonyítsuk be, hogy $\oplus\{\, P_i \mid P_i \in \mathcal{K}_j \,\}$ direkt felbonthatatlan ideálja R-nek minden j-re, és R ezeknek a direkt felbonthatatlan gyűrűknek a direkt összege.*

Megoldás: Legyen $R_j = \bigoplus_{P_i \in \mathcal{K}_j} P_i$. Tegyük fel, hogy $P \in \mathcal{K}_j$ és $r \in R$. Ekkor $rP = 1 \cdot rP = (e_1 + \ldots + e_n)rP = \oplus\, e_i r P$, ahol $P_i = e_i R$, tehát $e_i r P \leq P_i$ minden i-re. Ha $e_i r P \neq 0$, akkor $\mathrm{Hom}(P, P_i) \neq 0$, tehát $P_i \in \mathcal{K}$. Így $rP \leq R_j$ minden $P \in \mathcal{K}_j$-re és $r \in R$-re, vagyis $R_i \triangleleft R$.

Ha $R_j = S \oplus T$ nem triviális gyűrű-direktösszeg, akkor a Krull–Schmidt-tétel szerint S és T is $\mathcal{K}_j$-beli P_i-k direkt összege, így S valamelyik komponense és T valamelyik komponense között van homomorfizmus, és ez természetes módon kiterjed S és T közötti homomorfizmussá. De $S^2 = S$, és $S \leq \mathrm{Ann}(T)$ miatt $\mathrm{Hom}(S, T) = 0$, és ugyanígy $\mathrm{Hom}(T, S) = 0$, ami ellentmond az előbbieknek.

3. *Bizonyítsuk be, hogy R_R maximális részmodulusainak metszete, $J(R)$ annullál minden egyszerű jobb modulust.*

Megoldás: $\mathrm{Ann}(S) = \bigcap\{\, \mathrm{Ann}(x) \mid 0 \neq x \in S \,\}$, és az $R_R \to xR = S$, $r \mapsto xr$ szürjektív homomorfizmus magja éppen $\mathrm{Ann}(x)$, tehát $R_R/Ann(x) \cong S$. Így $\mathrm{Ann}(x)$ maximális modulus R_R-ben minden x-re, tehát $J(R) \leq \mathrm{Ann}(S)$.

4. *Legyen A véges dimenziós algebra. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek A tetszőleges J jobbideáljára.*

(i) J nilpotens;
(ii) J annullál minden egyszerű jobb A-modulust;
(iii) minden véges kompozícióláncú jobb A-modulust annullál J-nek egy alkalmas hatványa.

Megoldás: (i)$\Rightarrow$(ii): Ha $S \neq 0$ egyszerű modulus, akkor $SJ \leq S$ miatt $SJ = 0$ vagy $SJ = S$. Az utóbbi esetben $SJ^n = S \neq 0$, és ez ellentmond annak, hogy J valamelyik hatványa 0. Tehát $SJ = 0$.

(ii)$\Rightarrow$(iii): A kompozíciólánc hosszára vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Ha M_1 maximális M-ben, akkor M/M_1 egyszerű, tehát $MJ \leq M_1$. Az indukciós feltevés miatt $M_1 J^n = 0$ valamely n-re, így $MJ^{n+1} = 0$.

(iii)$\Rightarrow$(i): A_A-ra alkalmazva a feltevést $J^n = 1 \cdot J^n \leq A_A J^n = 0$ alkalmas n-re.

5. *Bizonyítsuk be, hogy $J(A)$ az A legnagyobb nilpotens jobbideálja, azaz $J(A)$ maga nilpotens, és tartalmaz minden nilpotens jobbideált.*

Megoldás: A 4. feladat (i)⇔(ii) állítása miatt elég azt belátni, hogy $J(A)$ a legnagyobb olyan jobbideál, ami annullál minden egyszerű modulust. A 3. feladat miatt maga $J(A)$ ilyen, és ha J annullálja az egyszerű modulusokat, akkor az A_A minden maximális M részmodulusára A_A/M-et is annullálja, azaz $J = 1 \cdot J \leq A_A J \leq M$, vagyis $J \leq J(A)$.

6. *Lássuk be, hogy egy R gyűrűben egy a elem akkor és csak akkor van benne egy nilpotens jobbideálban, ha egy nilpotens balideálban is benne van.*

Megoldás: Ha $(aR)^n = 0$, akkor $(Ra)^n = R(aR)^{n-1}a \leq R(aR)^n = 0$, és fordítva.

7. *Bizonyítsuk be, hogy $J(A) \lhd A$, és ugyanezt az ideált kapnánk, ha maximális balideálok metszeteként definiálnánk.*

Megoldás: Az 5. feladat miatt $J(A) = \{\, a \mid aR \text{ nilpotens} \,\}$. Ha $J(A)$-t a maximális balideálok metszeteként definiálnánk, akkor ugyanígy azt kapnánk, hogy ez a metszet $\{\, a \mid Ra \text{ nilpotens} \,\}$, és a 6. feladat szerint ez a kettő megegyezik.

8. *Bizonyítsuk be, hogy $J(A)$ a legkisebb olyan ideál A-ban, amelyre $A/J(A)$ féligegyszerű.*

Megoldás: Először belátjuk, hogy $J(A)$ féligegyszerű. $J(A)$ az A_A maximális jobbideáljainak metszete. Mivel A véges dimenziós, $J(A)$-t a maximális jobbideálok közül véges soknak a metszeteként is megkapjuk: $J(A) = M_1 \cap \ldots \cap M_n$. Tekintsük a $\varphi : A_A \to A/M_1 \oplus \cdots \oplus A/M_n$ modulus-homomorfizmust, amelyre $\varphi(a) = (a + M_1, \ldots, a + M_n)$ minden $a \in A$-ra. Ennek magja $M_1 \cap \ldots \cap M_n = J(A)$, tehát $A/J(A)$ beágyazódik véges sok egyszerű modulus direkt összegébe A fölött, de ezek egyúttal $A/J(A)$ fölött is egyszerű modulusok, tehát a direkt összeg, és így annak részmodulusa, $A/J(A)$ is féligegyszerű $A/J(A)$-modulus.

Ha $I \lhd A$ olyan, hogy A/I féligegyszerű, akkor A/I-ben a 0 előáll maximális jobbideálok metszeteként. De akkor A-ban ezen jobbideálok ősképei szintén maximálisak, és metszetük I-ben van, tehát az összes maximális jobbideál metszete is része I-nek.

9. *Bizonyítsuk be, hogy $J(A/J(A)) = 0$.*

Megoldás: Ez közvetlen következménye a 8. feladatnak

10. *(**Hf**) Legyen* $\operatorname{rad} M$ *az M modulus maximális részmodulusainak metszete. Bizonyítsuk be, hogy véges dimenziós A algebra fölött* $\operatorname{rad} M = MJ(A)$*, és ha M végesen generált, akkor $U \leq M$, $U + \operatorname{rad} M = M$ esetén $U = M$.*

Megoldás: Az M minden U maximális részmodulusára $(M/U)J(A) = 0$, azaz $MJ(A) \leq U$, ezért $MJ(A) \leq \operatorname{rad} M$. Fordítva, az $M/MJ(A)$ modulust annullálja $J(A)$, így ez $A/J(A)$-modulus, de $A/J(A)$ féligegyszerű, ezért $M/MJ(A)$ is az mint $A/J(A)$-modulus, de akkor A-modulusként is egyszerűek direkt összege. Ebből következik, hogy $M/MJ(A)$-ban a 0 előáll maximális részmodulusok metszeteként, így ezen maximális részmodulusok ősképeinek (amelyek M-ben maximálisak) metszete $MJ(A)$-ban van, és akkor $\operatorname{rad} M \leq MJ(A)$ is igaz.

Tegyük fel, hogy $U + \operatorname{rad} M = M$ és $U < M$. Ekkor a végesen generáltság és a Zorn-lemma miatt van olyan $U \leq U_0 < M$, hogy U_0 maximális M-ben. Viszont akkor $\operatorname{rad} M \leq U_0$ is igaz, így $U + \operatorname{rad} M \leq U_0 < M$, ami ellentmondás.

11. *Bizonyítsuk be, hogy egy p-hatványrendű csoport p karakterisztikájú test fölötti csoportalgebrájának Jacobson-radikálja azokból az elemekből áll, amelyeknél az együtthatók összege 0.*

Megoldás: Először belátjuk $|G|$-re vonatkozó indukcióval, hogy G-nek egyetlen irreducibilis reprezentációja van, a triviális reprezentáció. Legyen $\varphi : G \to GL(V)$ irreducibilis. Mivel G p-csoport, $Z(G) \neq 1$. Legyen $1 \neq g \in Z(G)$. Ha $|G| = p^n$, akkor $(\varphi(g))^{p^n} = \varphi(g^{p^n}) = \varphi(1) = I$, így $\varphi(g)$ minimálpolinomja osztója az $x^{p^n} - 1 = (x-1)^{p^n}$ (a p karakterisztika miatt!) polinomnak, ezért $\varphi(g)$-nek van 1-hez tartozó sajátvektora. Legyen V_1 a $\varphi(g)$ transzformáció 1-hez tartozó sajátaltere. A $g \in Z(G)$ feltevés miatt ez $\operatorname{Im}\varphi$-invariáns, így $V_1 = V$, és $g \in \operatorname{Ker}\varphi$. De akkor $\bar{\varphi} : G/\langle g \rangle \to GL(V)$ is irred reprezentáció, és az indukciós feltevés miatt triviális, tehát φ is az.

Legyen $A = KG$ és $M_0 = \{ \sum_{g \in G} \lambda_g g \mid \sum_{g \in G} \lambda_g = 0 \}$. M_0 nyilván részmodulus A_A-ban, és 1 kodimenziós, tehát maximális is. Másrészt bármely M maximális modulusra A_A/M az egyetlen, triviális modulussal lehet csak izomorf, így a faktormodulusban $1 \cdot g = 1$, azaz $1 - g \in M$ minden $g \in G$-re. Viszont ezek az elemek kigenerálják M_0-t, tehát, $M_0 \leq M$, és így a maximalitás miatt $M = M_0$. Ezzel beláttuk, hogy M_0 az egyetlen maximális részmodulus A_A-ban, és így $J(A) = M_0$.

12. (**Hf**) *Bizonyítsuk be, hogy egy* 28 *elemű nem kommutatív csoportnak van másodfokú irreducibilis reprezentációja* $\mathbb{C}$ *fölött.*