1. *Legyen $I \triangleleft R$. Bizonyítsuk be, hogy ha minden $x \in I$-re $1-x$ jobb invertálható R-ben (azaz I jobb kvázireguláris), akkor minden $x \in I$-re $1-x$ invertálható is (azaz I kvázireguláris).*

Megoldás: Tegyük fel, hogy minden $x \in I$-re $1-x$ jobb invertálható R-ben. Egy adott x-re legyen $x' \in R$ olyan, hogy $(1-x)x' = 1$. Ekkor $x' = 1-(-xx')$, ahol $-xx' \in I$, így x'-nek is van jobb inverze, másrész $1-x$ az x' bal inverze, így x' invertálható, és inverze $1-x$, tehát $1-x$ is invertálható.

Egy X részmodulus kicsi M-ben ($X << M$), ha minden $Y \leq M$-re $X + Y = M$-ből következik, hogy $Y = M$.

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha $Y \leq X << M$ és $Z \leq M$, akkor*
a) $Y << M$;
b) $\overline{X} << M/Z$.

Megoldás: a) Ha $Y + U = M$, akkor $X + U \geq Y + U = M$ miatt $X + U = M$, és így $U = M$.
b) Ha $\bar{X} + \bar{U} = M/Z$, akkor $X + U + Z = M$, de $X << M$, ezért $U + Z = M$, azaz $\bar{U} = \bar{M}$.

3. *Bizonyítsuk be, hogy minden 1-elemes R gyűrűben igazak az alábbiak.*
a) $J(R) \triangleleft R$.
b) $J(R) << R_R$.
c) $J(R) = \{\, x \in R \mid 1 - rxs$ invertálható $\forall r, s \in R \,\}$.
d) $J(R)$ ugyanaz, ha maximális jobbideálok vagy maximális jobbideálok metszeteként definiáljuk.

Megoldás: a) $J(R) = \bigcap_{S \text{ egyszerű}} \mathrm{Ann}(S)$, ugyanis $J(R)$ benne van az annullátorok metszetében a 2. feladatsor 3. feladata szerint, másrészt az annullátorok metszete annullál minden R/M faktormodulust, ahol $M \leq R_R$ maximális, tehát az annullátorok metszete benne van minden maximális jobbideálban. Mivel jobbmodulus annullátora ideál, $J(R)$ is az.
b) $J(R) + U = R_R$, $U < R_R$ esetén a Zorn-lemma és $1 \in R$ miatt van olyan maximális U_0 modulus R_R-ben, amely tartalmazza U-t. Ekkor viszont $J(R) + U \leq U_0 < M$ ellentmondás. Tehát $J(R) << R_R$.
c) Legyen $x \in J(R)$. Ekkor $1 = (1-x) + x \in (1-x)R + J(R)$, így $(1-x)R + J(R) = R$. De akkor $J(R) << R_R$ miatt $(1-x)R = R$, ezért $1-x$ jobb invertálható minden $x \in J(R)$-re. Az 1. feladat szerint ekkor $1-x$ invertálható is minden $x \in J(R)$-re. Mivel $J(R) \triangleleft R$, $rxs \in J(R)$ is igaz minden $r, s \in R$-re, tehát az előbbiek miatt $1 - rxs$ is invertálható. Fordítva, ha $x \notin J(R)$, azaz $x \notin M$ valamely maximális $M \leq R_R$ modulusra, akkor $M + xR = R$, így van olyan $m \in M$ és $r \in R$, amelyre $m + xr = 1$, ezért $1 - xr = m \in M$ miatt $1 - xr$ nem invertálható, tehát x nem eleme a jobb oldali halmaznak sem.
d) A c) ugyanazt a halmazt adja meg a jobb- vagy bal ideálokkal definiált $J(R)$-re.

4. *Adjunk példát olyan*
a) R gyűrűre, amelyre $R/J(R)$ nem féligegyszerű;
b) R gyűrűre, amelyre $J(R)$ nem nilpotens;
c) olyan M_R modulusra, amelyre $\operatorname{rad} M$ nem kicsi M-ben.

Megoldás: a) $J(\mathbb{Z}) = 0$, ugyanis a maximális (jobb) ideálok a $p\mathbb{Z}$ ideálok p prímekre, viszont ezek metszetében csak olyan szám lehet, ami minden prímmel osztható, azaz csak a 0. Viszont féligegyszerű $\mathbb{Z}$-modulus csak $\mathbb{Z}_p$-k direkt összege lehet, és ebben minden elem véges rendű, így $\mathbb{Z}/J(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ nem lehet féligegyszerű.

b) Legyen $R = \mathbb{R}[[x]]$, az $\mathbb{R}$ fölötti 0 körüli hatványsorok gyűrűje. Itt pontosan azok az elemek invertálhatók, amelyeknek a konstans tagja nem 0 (az inverz együtthatóit a legkisebb indexűtől kezdve ki lehet számolni), így a konstans tag nélküli hatványsorok alkotják az egyetlen maximális ideált, tehát a $J(R)$-et is. Erre $J(R)^n = \{\, a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots \mid a_i \in \mathbb{R} \,\} \neq 0$.

c) $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$-ben nincs maximális ideál, ugyanis akkor $\mathbb{Z}_p$ homomorf képe lenne az osztható $\mathbb{Q}$-nak (osztható: minden elemnek van n-edrésze), miközben $\mathbb{Z}_p$ nyilvánvalóan nem osztható. Tehát $J(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, és ez nyilván nem kicsi önmagában.

5. (**Hf**) *a) Legyen $\alpha : M \to N$ modulus-homomorfizmus. Bizonyítsuk be, hogy $(\operatorname{rad} M)\alpha \leq \operatorname{rad} N$.*

b) Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{rad}(\bigoplus_{i\in I} M_i) = \bigoplus_{i\in I} \operatorname{rad} M_i$.

Megoldás:

b) $\leq$: $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$-ben maximálisak azok a direkt összegek, ahol egy komponensnek egy maximális részmodulusát vesszük, a többi helyen pedig az egész modulust. Ezek metszete viszont $\bigoplus_{i\in I} \operatorname{rad} M_i$, tehát $\operatorname{rad} M \leq \bigoplus_{i\in I} \operatorname{rad} M_i$.

$\geq$: Legyen $\alpha_i : M_i \to M$ a természetes beágyazás. Erre alkalmazva az a) részt azt kapjuk, hogy $\operatorname{rad} M_i \leq \operatorname{rad} M$ minden i-re, azaz $\bigoplus_{i\in I} \operatorname{rad} M_i \leq \operatorname{rad} M$.

6. *Bizonyítsuk be a Fitting-lemmát, azaz, hogy ha M maximum- és minimumfeltételes modulus, és $\varphi \in \operatorname{End}(M)$, akkor van olyan n, amelyre $M = \operatorname{Ker}\varphi^n \oplus \operatorname{Im}\varphi^n$.*

Megoldás: Mivel $\operatorname{Ker}\varphi \leq \operatorname{Ker}\varphi^2 \leq \ldots$ és $\operatorname{Im}\varphi \geq \operatorname{Im}\varphi^2 \geq \ldots$, a minimum- és maximumfeltétel miatt van olyan n, hogy $\operatorname{Ker}\varphi^n = \operatorname{Ker}\varphi^{n+1} = \ldots$ és $\operatorname{Im}\varphi^n = \operatorname{Im}\varphi^{n+1} = \ldots$. Belátjuk, hogy ekkor $R = \operatorname{Ker}\varphi^n \oplus \operatorname{Im}\varphi^n$. Ha $u \in \operatorname{Ker}\varphi^n \cap \operatorname{Im}\varphi^n$, akkor $u = v\varphi^n$ valamely v-re, és $u\varphi^n = 0$, így $v \in \operatorname{Ker}\varphi^{2n} = \operatorname{Ker}\varphi^n$, tehát $u = v\varphi^n = 0$. Másrészt tetszőleges $r \in R$-re $r\varphi^n \in \operatorname{Im}\varphi^n = \operatorname{Im}\varphi^{2n}$, tehát van olyan u, hogy $r\varphi^n = u\varphi^{2n}$, így $r - u\varphi^n \in \operatorname{Ker}\varphi^n$. Ezért $r = (r - u\varphi^n) + u\varphi^n \in \operatorname{Ker}\varphi^n + \operatorname{Im}\varphi^n$.

7. *Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_2 S_3 \cong \mathbb{Z}_2 D_3$ csoportalgebra direkt felbonthatatlan projektív modulusait.*

Megoldás: Legyen f az egyik harmadrendű forgatás, t pedig az egyik tükrözés D_3-ban, és legyen $A = \mathbb{Z}_2 D_3$. Egy csoportalgebrában tetszőleges H részcsoport elemeinek u összegére $u^2 = |H|\, u$, így $\operatorname{char} K \mid |H|$ esetén u nilpotens, különben pedig $(1/|H|)u$ idempotens. Ebben az esetben $1 + f + f^2$ idempotens, sőt centrális idempotens is, mivel teljes konjugáltosztályok összege. Tehát a komplementerével, $f + f^2$-tel együtt A-nak gyűrűk direkt összegére való felbontását adja: $A = (1 + f + f^2)A \oplus (f + f^2)A$. Az első komponens 2-dimenziós, és van benne egy 1-dimenziós nilpotens ideál, amelyet D_3 elemeinek az összege generál, tehát a radikállal vett faktora egyszerű, és így nem bontható tovább modulusok direkt összegére. A második komponens viszont 4-dimenziós, ebben próbálunk még idempotenseket keresni.

Legyen $z = f + f^2$. Ekkor zA-nak mint vektortérnek bázisa $\{\, z, zt, zf, zft \,\}$ ($zf^2 = z + zf$, $zf^2t = zt + zft$).

A következő a szorzástábla a báziselemeken:

	z	zt	zf	zft
z	z	zt	zf	zft
zt	zt	z	$zt+zft$	$z+zf$
zf	zf	zft	$z+zf$	$zt+zft$
zft	zft	zf	zt	z

Ebből egyszerűen kiszámítható, hogy egy $az+bt+czf+dzft$ elem négyzete $(a+b+c+d+bd)z+(bc)zt+(c)zf+(cd)zft$ (használva azt is, hogy $x^2=x$ igaz $\mathbb{Z}_2$-ben). Tehát zA egy eleme akkor idempotens, ha $a=a+b+c+d+bd$, $b=bc$ és $c=cd$. Ha $c=0$, akkor ebből $b=d=0$, és akkor nem kapunk új idempotenst. Marad az, hogy $c=1$ és $b+d+1+bd=0$, azaz $(b+1)(d+1)=0$, vagyis b és d egyike 1. Például $z(f+t)$ idempotens, és ennek kiegészítője $z+zf+zt$. Mindkettő kétdimenziós alteret generál, és a három nem 0 elemüket f ciklikusan permutálja, t pedig egyet fixen hagy, kettőt megcserél. Ebből látszik, hogy irreducibilis és egymással izomorf a kapott két modulus (az izomorfiát az is mutatja, hogy $t\cdot z(f+t)A=z(f^2t+1)A=z(1+f+t)A)$. Tehát $\mathbb{Z}_2D_3$-nak két nem izomorf 2-dimenziós direkt felbonthatatlan projektív modulusa van: $(1+f+f^2)A$ és $(f+f^2)(f+t)A=(1+f^2+ft+f^2t)A$ ezeknek egy-egy példánya a csoportalgebrában. Az elsőnek van egy nemtriviális radikálja, a második viszont egyszerű modulus.

8. (**Hf**) *Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_3S_3$ csoportalgebra Jacobson-radikálját. Hány direkt felbonthatatlan projektív modulusa van $\mathbb{Z}_3S_3$-nak, és ezek hány dimenziósak?*