1. *Adjuk meg S_4-nek egy 3-dimenziós valós irreducibilis reprezentációját, és határozzuk meg ennek a reprezentációnak a karakterét.*

Megoldás: A szabályos tetraéder egybevágósági csoportja S_4, és ha egy ilyen tetraédert középpontját az origóba tesszük, akkor az egybevágóságai a 3-dimenziós valós téren lineáris transzformációk lesznek. Vegyük fel azt a bázist, amelynek elemei az origóból a tetraéder három csúcsába mutató vektorok (ekkor a negyedik csúcsba mutató vektor ezek összegének ellentettje, mert az átlaguk **0** kell, hogy legyen). Ebben felírva minden konjugáltosztályból egy transzformációt, a következő mátrixokat kapjuk (a permutációknak az a transzformáció felel meg, amelyik a négy csúcsot az adott permutáció szerint permutálja, és a három bázisvektor az első három csúcs helyvektora):

$$X(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad X((12)(34)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad X((123)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X((12)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad X((1234)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Így $\chi(1) = 3$, $\chi((12)(34)) = -1$, $\chi((123)) = 0$, $\chi((12)) = 1$, $\chi((1234)) = -1$.

2. *Bizonyítsuk be, hogy egy irreducibilis karakternek és egy lineáris karakternek a szorzata mindig irreducibilis.*

Megoldás: Legyen $\chi \in \operatorname{Irr} G$ és λ lineáris. Ekkor $[\lambda\chi, \lambda\chi] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \lambda(g)\chi(g)\overline{\lambda(g)\chi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\lambda(g)|^2 |\chi(g)|^2$. De $\lambda(g)$ egységgyök, így $|\lambda(g)|^2 = 1$, és ezért az utóbbi összeg $[\chi, \chi] = 1$.

3. *Határozzuk meg A_4 és S_5 karaktertábláját.*

Megoldás: A_4-nek a kommutátor részcsoportja a 4-elemű Klein-csoport, így három lineáris karaktere van, ami az $A_4/A_4' \cong C_3$ karaktereinek felel meg: a harmadrendű elem tetszőleges harmadik egységgyökbe képződhet, az inverze pedig ennek konjugáltjába. Az egyetlen nem lineáris karaktert ezután az ortogonalitási relációk segítségével is kiszámíthatjuk, de megkaphatjuk úgy is, mint S_4 már ismert (valamelyik) 3-adfokú irreducibilis reprezentációjának A_4-re való megszorítottját. A karaktertáblában ε primitív harmadik egységgyök. A további számolásokhoz segítségül álljon itt S_4 karaktertáblája is.

A_4	1	(..)(..)	$(123)^G$	$(321)^G$
	1	1	1	1
	1	1	ε	$\bar{\varepsilon}$
	1	1	$\bar{\varepsilon}$	ε
	3	-1	0	0

S_4	1	(..)(..)	(...)	(..)	(....)
φ_1	1	1	1	1	1
φ_2	1	1	1	-1	-1
φ_3	2	2	-1	0	0
φ_4	3	-1	0	1	-1
φ_5	3	-1	0	-1	1

S_5-nek hét konjugáltosztálya van. Az alábbi táblázatban a konjugáltosztályoknál indexben a méretük is fel van tüntetve.

S_5	$1\ ^{1}$	$(..)(..)\ ^{15}$	$(...)\ ^{20}$	$(.....)\ ^{24}$	$(..)\ ^{10}$	$(....)\ ^{30}$	$(..)(...)\ ^{20}$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	4	0	1	-1	2	0	-1
χ_4	4	0	1	-1	-2	0	1
χ_5	5	1	-1	0	1	-1	1
χ_6	5	1	-1	0	-1	1	-1
χ_7	6	-2	0	1	0	0	0

A lineáris karakterek a triviális és az, amelyik páros permutációkhoz 1-et, páratlanokhoz -1-et rendel (több lineáris nem is lehet, mert a kommutátor részcsoport, A_5 kettő indexű.) Az S_5 természetes permutációreprezentációjából származó permutációs karakter ($\varphi_1^{S_5}$) értékei a konjugáltosztályokon $(5,1,2,0,3,1,0)$, és ennek komponense a χ_1, viszont $\chi_3 = \varphi_1^{S_5} - \chi_1$ már irreducibilis, $\chi_4 = \chi_3\chi_2$ szintén irreducibilis a 2. feladat eredménye szerint. További indukált karakterek S_4-ről mint az egyik elem stabilizátoráról: $\chi := \varphi_3^{S_5}$: $(10,2,-2,0,0,0,0)$, és $\varphi_4^{S_5}$: $(15,-1,0,0,3,-1,0)$. Az utóbbinak komponense a χ_3, és a maradék ψ : $(11,-1,-1,1,1,-1,1)$. Az így kapott 10-edfokú χ és 11-edfokú ψ karakternek már $\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4$ mindegyikével 0 a skaláris szorzata, $[\chi,\chi] = 2$, $[\psi,\psi] = 2$, és $[\chi,\psi] = 1$, tehát χ és ψ is két új irreducibilis karakter összege, amelyek közül egy közös: $\chi = \chi_5 + \chi_6$, $\psi = \chi_5 + \chi_7$. χ_5 és χ_7 közül valamelyik nem 0 a páratlan elemek összes konjugáltosztályán, mert ψ nem 0 itt, így a χ_2-szerese tőle különböző irreducibilis karakter, és csak az lehet χ_6. ψ másik komponensének a χ_2-vel való megszorzása viszont nem ad új karaktert, tehát annak a páratlan elemek konjugáltosztályain 0 az értéke. Ebből következik, hogy $\chi_6 = \chi_2\chi_5$, és χ ezek összege, tehát az első négy oszlopnak ezeket a sorait ki tudjuk tölteni, aztán ψ-ből a hetedik sor elejét is. Másrészt χ_5 az utolsó három oszlopon meg kell, hogy egyezzen ψ-vel, és ennek alapján be tudjuk fejezni a karaktertábla kitöltését.

4. (**Hf**) *Egy papirusztekercsen egy táblázatot találtak, amiről feltételezik, hogy egy véges csoport karaktertáblája. Sajnos, néhány helyen már nem olvasható a szám. Egészítsük ki a táblázatot (vegyük figyelembe, hogy a sorok és oszlopok esetleg nem a megszokott sorrendben vannak, tehát az 1 elemhez tartozó oszlop nem feltétlenül az első, és a triviális karakter nem feltétlenül az első sorba került)! Mekkora a csoport rendje, konjugáltosztályainak mérete, milyen rendű normálosztói vannak? Mekkora a csoport centruma? Hány olyan csoport van, aminek ez a karaktertáblája?*

1		1		−1	
1		1	−1		
	2	−1	−1	0	0
1		1	−1	−1	1
2	−2	−1	1		

5. *Bizonyítsuk be, hogy egy nemtriviális csoport karaktertáblájának minden sorában és minden oszlopában legalább két nemnulla szám van.*

Megoldás: A triviális karakter sorára nyilván igaz ez. Ha $1_G \neq \chi \in \operatorname{Irr} G$, akkor $0 = [\chi, 1_G] = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{k}|\mathcal{K}_i|\,\chi(g_i)$, és $\mathcal{K}_1 = \{1\}$ esetén $\chi(g_1) \neq 0$, így van másik konjugáltosztály is, amelynek g_i reprezentáns elemére $\chi(g_i) \neq 0$.

Az 1-nek az oszlopa a karakterek fokait tartalmazza: ezek nem nullák, $g \neq 1$-re pedig $\sum_{i=1}^{k}\chi_i(g)\chi_i(1) = 0$, és a tagok közül $1_G(g)1_G(1) \neq 0$, így van még egy nem nulla tag.

6. *Bizonyítsuk be, hogy 1_G mindig szerepel egy permutációs karakter irreducibilis összeadandói között. Mennyi az 1_G együtthatója?*

Megoldás: $[\chi, 1_G] = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}(g)|$, és ez a Burnside-lemma szerint éppen az orbitok száma. (Az $\{(\alpha, g)\,|\,\alpha\in\Omega,\ g\in G,\ \alpha g = \alpha\}$ halmaz elemeit kétféleképpen megszámolva kapjuk, hogy a fixpontok számának összege a stabilizátorok elemszámának összegével egyenlő, ami viszont orbitonként $|G|$.)

7. (**Hf**) *Tegyük fel, hogy $H \leq G$, és χ hűséges karaktere G-nek. Bizonyítsuk be, hogy H akkor és csak akkor Abel-csoport, ha χ_H minden irreducibilis összeadandója lineáris.*

8. *Legyen G Frobenius-csoport, $N \lhd G$ a Frobenius-mag (azaz $N = \{\, g \in G \,|\, g \notin (H^x \setminus \{\, 1 \,\}) \, \forall\, x \in G \,\}$). Bizonyítsuk be, hogy ha $\chi \in \operatorname{Irr} N$, akkor $\chi^G \in \operatorname{Irr} G$.*

Megoldás: Később visszatérünk rá.