1. (**Hf**) *Legyen $H, K \leq G$ úgy, hogy $HK = G$, és legyen φ osztályfüggvény a H csoporton. Bizonyítsuk be, hogy $(\varphi^G)_K = (\varphi_{H\cap K})^K$.*

2. *Bizonyítsuk be, hogy az alábbi karaktertábla izomoria erejéig csak egyetlen csoport karaktertáblája lehet ($\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$).*

1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	ε	$\bar{\varepsilon}$	ε	$\bar{\varepsilon}$
1	1	1	$\bar{\varepsilon}$	ε	$\bar{\varepsilon}$	ε
3	3	-1	0	0	0	0
2	-2	0	-1	-1	1	1
2	-2	0	$-\varepsilon$	$-\bar{\varepsilon}$	ε	$\bar{\varepsilon}$
2	-2	0	$-\bar{\varepsilon}$	$-\varepsilon$	$\bar{\varepsilon}$	ε

Megoldás: A csoport 24 elemű, 2 elemű centruma van, és a konjugáltosztályok elemszáma rendre 1, 1, 6, 4, 4, 4, 4. Az első három konjugáltosztály egy 8 elemű normálosztót alkot, amelynek van nem lineáris irreducibilis karaktere (az ötödik karakter megszorítása), így ez egy nem kommutatív 8-adrendű csoport. Mivel van benne legalább 6 azonos rendű elem, a két lehetőség közül csak a kvaterniócsoport lehet. Így a csoport a kvaterniócsoportnak egy 3-elemű ciklikus csoporttal (egy 3-Sylow-részcsoporttal) vett szemidirekt szorzata. Mivel a centrum csak kételemű, ez nem direkt szorzat, tehát a C_3-nak az $\mathrm{Aut}(Q)$-ba való beágyazása határozza meg a szemidirekt szorzatot. De $\mathrm{Aut}(Q) \cong S_4$, és itt minden harmadrendű elem konjugált, tehát az összes lehetséges szemidirekt szorzat izomorf egymással.

3. *Bizonyítsuk be, hogy $Z(G) = \bigcap\limits_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G} Z(\chi)$.*

Megoldás: $\leq$: $Z(G)\operatorname{Ker}\chi/\operatorname{Ker}\chi \leq Z(G/\operatorname{Ker}\chi) = Z(\chi)/\operatorname{Ker}\chi$ minden $\chi \in \mathrm{Irr}\, G$-re, így $Z(G) \leq Z(\chi)$.

$\geq$: Ha $g \in Z(\chi)$ minden $\chi \in \mathrm{Irr}\, G$-re, akkor $\bar{g} \in Z(G/\operatorname{Ker}\chi)$ $\forall \chi \in \mathrm{Irr}\, G \Rightarrow [\bar{g}, \bar{x}] = 1$ $G/\operatorname{Ker}\chi$-ben $\forall x \in G$, $\forall \chi \in \mathrm{Irr}\, G \Rightarrow [g, x] \in \operatorname{Ker}\chi$ $\forall x \in G$, $\forall \chi \in \mathrm{Irr}\, G \Rightarrow [g, x] \in \bigcap\limits_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G} \operatorname{Ker}\chi = 1$ $\forall x \in G \Rightarrow g \in Z(G)$.

4. *Bizonyítsuk be, hogy nem izomorf Abel-csoportoknak különböző a karaktertáblája.*

Megoldás: A ciklikus normálosztókat meg lehet találni a karaktertábla alapján mint az egy elemet (egy konjugáltosztályt) a magjában tartalmazó karakterek magjának metszetét. Az is megállapítható, hogy egy csoport adott normálosztók direkt szorzata-e, mert leolvasható, hogy mindegyik normálosztó diszjunkt-e a többi generátumától, és hogy együtt generálják-e az egész csoportot. Így a karaktertábla alapján megmondhatjuk, hogy az adott Abel-csoport hányadrendű ciklikus csoportok direkt szorzata.

5. (**Hf**)
a) Bizonyítsuk be, hogy ha A Abel-csoport és χ karaktere A-nak, akkor $[\chi, \chi] \geq \chi(1)$.
b) Legyen $A \leq G$, A Abel-csoport, $\chi \in \operatorname{Irr} G$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(1) \leq |G : A|$.

6. *Tegyük fel, hogy G-nek van olyan hűséges komplex reprezentációja, amelynek foka kisebb a $|G|$ legkisebb prímosztójánál. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G Abel-csoport.*

Megoldás: χ felírható irreducibilis karakterek összegeként, amelyeknek foka osztója $|G|$-nek, így a feltétel miatt csak lineárisak lehetnek: $\chi = \sum \lambda_i$. De $1 = \operatorname{Ker} \chi \geq \bigcap \lambda_i \geq G'$, így $G' = 1$, azaz G Abel.

7. *Legyen χ a G csoport egy karaktere. Definiáljuk a $\det \chi : G \to \mathbb{C}^\times$ leképezést a $(\det \chi)(g) = \det X(g)$ összefüggéssel, ahol χ az X reprezentáció karaktere. Bizonyítsuk be, hogy $\det \chi$ jól definiált lineáris karakter.*

Megoldás: Ha X és Y ugyanazt a χ karaktert adják, akkor ekvivalensek, azaz $Y(g) = P^{-1}X(g)P$ valamely P-re, és $\det P^{-1}X(g)P = \det X(g)$. $\det X$ valóban reprezentáció, mert $\det X(gh) = \det X(g)X(h) = \det X(g) \cdot \det X(h)$, és mivel $\mathbb{C}^\times$-ba képez, $\det \chi$ lineáris.

8. *Bizonyítsuk be, hogy egyszerű csoportnak nem lehet másodfokú irreducibilis karaktere.*

Megoldás: Tegyük fel, hogy $\chi \in \operatorname{Irr} G$, és $\chi(1) = 2$. Mivel $\chi(1) \mid |G|$, G páros rendű, és így van másodrendű g eleme. $X(g) \sim \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}$, ahol $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ második egységgyökök, tehát vagy $\chi(g) = \pm 2$, és akkor $Z(\chi) > 1$, ami ellentmond G egyszerűségének, vagy $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = \{1, -1\}$, és akkor $\det \chi$ nem triviális lineáris karakter, így $G' < G$, és ez megint ellentmond annak, hogy G (nem Abel) egyszerű csoport.