

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $K, H \leq G$, $\psi \in \text{Irr } H$, és $(\psi^G)_K$ irreducibilis, akkor $G = HK$. (Útmutatás: Lássuk be, hogy $[(\psi^G)_K, (\psi_{H \cap K})^K] \neq 0$.)

Megoldás: $[(\psi^G)_K, (\psi_{H \cap K})^K] = [((\psi^G)_K)_{H \cap K}, \psi_{H \cap K}] = [(\psi^G)_{H \cap K}, \psi_{H \cap K}] = [((\psi^G)_H)_{H \cap K}, \psi_{H \cap K}] \neq 0$, mert $[(\psi^G)_H, \psi] = [\psi, \psi] \neq 0$ és $\psi \in \text{Irr } H$ miatt ψ direkt összeadandója $(\psi^G)_H$ -nak, és így a $H \cap K$ -ra való megszorítottjaikra is igaz ez. Mivel $(\psi^G)_K$ irreducibilis, ebből következik, hogy $(\psi^G)_K$ direkt összeadandója $(\psi_{H \cap K})^K$ -nak, és így $|G : H| \psi(1) = \psi^G(1) = (\psi^G)_K(1) \leq (\psi_{H \cap K})^K(1) = |K : (H \cap K)| \psi(1)$, amiből $|G| \leq |H| |K| / |H \cap K| = |HK|$, tehát $G = HK$.

2. Legyen G egyszerű, $\chi \in \text{Irr } G$, $\chi(1) = p$ prím. Bizonyítsuk be, hogy G p -Sylowja p elemű. (Útmutatás: Ha a p -Sylow nem Abel, akkor $Z(P) \leq Z(\chi)$.)

Megoldás: A $\chi(1) = p$ feltevés miatt $|G|$ osztható p -vel, tehát G -nek nem triviális p -Sylowja van, legyen ez P . Ha χ_P irreducibilis, akkor $1 \neq Z(P) \leq Z(\chi_P) \leq Z(\chi)$, de az utóbbi g egyszerűsége miatt triviális, ez ellentmondás.

Tehát χ_P nem irreducibilis, és így minden irreducibilis komponensének foka p -nél kisebb, másrészt osztója $|P|$ -nek, tehát csak 1 lehet. Viszont G egyszerűsége miatt χ hűséges, tehát ha χ_P minden komponense lineáris, akkor P -nek Abel-csoportnak kell lennie.

Minden $1 \neq x \in P$ -re $C_G(x) \geq P$ miatt $p \nmid |\mathcal{K}(x)|$ és $Z(\chi) = 1$, így a Burnside-tétel miatt $\chi(x) = 0$. Ezért $\chi_P = a \cdot \rho = a \cdot \sum_{\varphi_i \in \text{Irr } P} \varphi_i$ valamely $a > 0$ -ra, így $[\chi_P, \varphi_i] = a \neq 0$ minden i -re, tehát $\chi_P(1) = a \cdot |\text{Irr } P| \geq |\text{Irr } P|$. Viszont $\chi_P(1) = p$, ezért $p \geq |\text{Irr } P| = |P|$, következésképpen $|P| = p$.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha G valamely automorfizmusa minden karaktert helyben hagy, akkor minden konjugáltosztályt is helyben hagy.

Megoldás: Legyen \mathcal{K} egy konjugáltosztály, és tegyük fel, hogy a σ automorfizmus minden karaktert helyben hagy. Ekkor $g \in \mathcal{K}$, $\chi \in \text{Irr } G$ -re $\chi(g) = \chi^\sigma(g^\sigma) = \chi(g^\sigma)$, tehát \mathcal{K} és \mathcal{K}^σ oszlopa megegyezik a karaktertáblában. Az ortogonalitási relációk miatt ebből következik, hogy $\mathcal{K} = \mathcal{K}^\sigma$.

4. Legyen G egy Frobenius-csoport, N maggal és H komplementummal. Bizonyítsuk be az alábbi állításokat.

a) Minden $1 \neq x \in N$ -re $C_G(x) \leq N$.

b) Tetszőleges $1 \neq h \in H$ -ra a h -val való konjugálás nem hagyja helyben N semelyik nem triviális konjugáltosztályát.

c) Tetszőleges $1 \neq h \in H$ -ra a h -val való konjugálás nem hagyja helyben N semelyik nem triviális irreducibilis karakterét.

d) N minden nem triviális irreducibilis karaktere konjugált egymással G -ben.

e) Minden $1_N \neq \varphi \in \text{Irr}(N)$ -re $\varphi^G \in \text{Irr } G$.

Megoldás: a) Tegyük fel, hogy van olyan $g \in G \setminus N$, amelyre $[x, g] = 1$. Ekkor $g = h^y$ valamely $1 \neq h \in H$ -ra és $y \in G$ -re. Így $[x, h^y] = 1$, ebből $[x^{y^{-1}}, h] = 1$, tehát $z = x^{y^{-1}}$ -re $h^z = h \Rightarrow H \cap H^z \neq 1 \Rightarrow z \in H \cap N = 1 \Rightarrow x = 1$, ami ellentmond a feltevésnek.

b) Ha $x^h = x^y$ valamely $1 \neq x \in N$, $y \in N$, $1 \neq h \in H$ -ra, akkor $x^{hy^{-1}} = x$, ezért $hy^{-1} \in C_G(x) \leq N$, és $y \in N$, tehát $h \in N \cap H = 1$, ellentmondás.

c) A konjugáltosztályok permutálása oszlopművelet, a karaktereké sorművelet a C karaktertáblán mint $k \times k$ -as mátrixon, és erre $PC = CQ$, alkalmas P és Q permutációs

mátrixra, ahol $\text{tr } Q = 1$, mert az első konjugáltosztály helyben marad, a többi mind más konjugáltosztályba képződik. Az ortogonalitási relációk miatt C invertálható, és $C^{-1}PC = Q$, így $\text{tr } Q = \text{tr } P = 1$. De Q is permutációs mátrix, és az átlójának első eleme 1 (a triviális karaktert helyben hagyja a konjugálás), így a többinek 0-nak kell lennie.

d) $[(\varphi^G)_N, \varphi] = [\varphi^G, \varphi^G] \neq 0$, így a Clifford-tétel szerint $(\varphi^G)_N = e \cdot \sum \varphi_i$, ahol φ_i -k a φ konjugáltjai, és $e = [(\varphi^G)_N, \varphi]$. Mivel H fixpontmentesen hat a konjugálással N nem triviális irreducibilis karakterein, az utóbbiaknak minden H szerinti orbitjában $|H|$ karakter van. Ráadásul N helyben hagyja a karaktereket, így a $G = NH$ szerinti konjugáltak a H szerinti konjugáltak, azaz φ -nek G -re nézve $|H|$ konjugáltja van. Ebből $(\varphi^G)_N(1) = e |H| \varphi(1)$, másrészt $(\varphi^G)_N(1) = \varphi^G(1) = |G : N| \varphi(1) = |H| \varphi(1)$, tehát $e = 1$, amiből $[\varphi^G, \varphi^G] = 1$.

5. (Hf) *Tegyük fel, hogy $A \leq G$ Abel részcsoport, és $|G : A|$ prímszám. Bizonyítsuk be, hogy $G' < G$.*
6. (Hf) *Tegyük fel, hogy G -nek egyetlen nem lineáris irreducibilis karaktere van. Bizonyítsuk be, hogy G' Abel. (Útmutatás: Számítsuk ki a G reguláris karakterének megszorítását G' -re kétféleképpen.)*