1. (**Hf**) *Legyen D és D' két kitöltése ugyanannak a Young-táblázatnak, amelyekben minden sor és minden oszlop számai növekvőek, és tegyük fel, hogy a számokat sorfolytonosan olvasva a D-hez tartozó számsorozat lexikografikusan kisebb a D'-höz tartozónál. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $e(D)e(D') = 0$. (Útmutatás: Lássuk be, hogy D-nek vannak olyan egy sorban levő elemei, amelyek D'-ben egy oszlopba kerültek.*

Megoldás: Legyen az első eltérés a két kitöltés között az i. sor j. helyén, ahol D-ben a, D'-ben b áll, és $a < b$. D'-ben a nem lehet az első $i-1$ sorban, mert ott változatlanok a számok D-hez képest, és az i. sorban sem, mert az a j. helyig mással van kitöltve, a maradék részébe pedig csak a-nál (sőt b-nél) nagyobbak kerülhettek. Emiatt viszont a j. és az az utáni oszlopok maradék részébe sem kerülhetett az a, tehát csak az első $j-1$ oszlop valamelyikében lehet. Ott viszont az i. sorban a-nak csak D-beli sortársai vannak, tehát a ezek egyikével került egy oszlopba a D'-ben.

Legyen a és c két olyan elem, amely D-ben egy sorban, D'-ben egy oszlopban van. Ekkor a $t = (ac)$ transzpozíció $R(D)$-ben és $C(D')$-ben is benne van, így $e(D)e(D') = e(D)tte(D') = e(D)sgn(t)e(D') = -e(D)e(D')$, amiből $e(D)e(D') = 0$

2. *Legyenek $e_1, \ldots, e_n$ idempotensek egy R gyűrűben, és $e_ie_j = 0$, ha $i < j$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\sum\limits_{i=1}^{n} e_iR = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} e_iR$.*

Megoldás: Tegyük fel, hogy $\sum e_ir_i = 0$ valamely $r_i \in R$ elemekre úgy, hogy nem mindegyik tag 0. Legyen i a legkisebb index, amelyre $e_ir_i \neq 0$. Ha balról beszorozzuk az egyenletet e_i-vel, azt kapjuk, hogy $e_ir_i = 0$, ami ellenmond a feltevésnek.

3. *Bizonyítsuk be, hogy S_n egy adott táblázathoz tartozó irreducibilis reprezentációjának a foka legalább akkora, mint ahány olyan kitöltése van a táblázatnak, ahol minden sor és minden oszlop számai növekvőek.*

Megoldás: Legyen a kitöltések száma t. A megadott fajta kitöltésekhez az 1. feladat eredménye alapján találunk e_{D_i} $(i = 1, \ldots, t)$ idempotenseket úgy, hogy $e_{D_i} \cdot e_{D_j} = 0$, ha $i < j$, és így a 2. feladat szerint $\oplus_{i=1}^{t} e_{D_i}A \leq A$. Mivel az összeadandók mind izomorf egyszerű modulusok, az algebrának egyazon gyűrűkomponensében vannak (a többi komponens benne van az annullátorukban), és ez a komponens $M_{n_i}(F_i)$, tehát $n_i \geq t$. Mivel az $M_{n_i}(F_i)$ egyszerű részmodulusainak F_i-dimenziója éppen n_i, azt kapjuk, hogy így a $\mathbb{Q}$-dimenziójuk $\geq n_i \geq t$. (*Megj.: Az egyenlőség is igaz*)

4. *Hányadfokúak az S_6 irreducibilis karakterei?*

Megoldás: Felírhatjuk az 1. feladat szerinti kitöltéseket az összes partícióra. Ezek száma: $1, 5, 9, 10, 5, 16, 10, 5, 9, 5, 1$. A 3. feladat szerint ezek együtt legalább $1^1+5^2+9^2+10^2+5^2+16^2+10^2+5^2+9^2+5^2+1^2 = 720$ dimenziót adnak, ami a csoportalgebra dimenziója, tehát az egyes modulusok pontosan a megadott dimenziójúak. A dimenziók kiszámítására ismert a "Hook length formula " is, amely szerint egy adott táblázathoz tartozó reprezentáció foka $n!/(k_1k_2\cdots k_n)$, ahol k_i az i. mezőtől jobbra, lefelé és rajta levő mezők száma. Eszerint a következő módon jönnek ki a dimenziók:

$$\begin{aligned}
6:&\quad 6!/(6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)=1\\
5+1:&\quad 6!/(6\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1)=5\\
4+2:&\quad 6!/(5\cdot 4\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1)=9\\
4+1+1:&\quad 6!/(6\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1)=10\\
3+3:&\quad 6!/(4\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 1)=5\\
3+2+1:&\quad 6!/(5\cdot 3\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot 1)=16\\
3+1+1+1:&\quad 6!/(6\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1)=10\\
2+2+2:&\quad 6!/(4\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1)=5\\
2+2+1+1:&\quad 6!/(5\cdot 2\cdot 4\cdot 1\cdot 2\cdot 1)=9\\
2+1+1+1+1:&\quad 6!/(6\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)=5\\
1+1+1+1+1+1:&\quad 6!/(6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)=1
\end{aligned}$$

5. (**Hf**) *Tegyük fel, hogy* $P \lhd G$, P *p-csoport, és* $p = \operatorname{char} F$.
a) Bizonyítsuk be, hogy $J(FP) \subseteq J(FG)$.
b) Bizonyítsuk be, hogy P *benne van a* G *minden irreducibilis* F*-reprezentációjának a magjában. (ld. 2/11. feladat)*

6. *Határozzuk meg az* S_3 *irreducibilis* $\mathbb{C}$*-karaktereihez tartozó Brauer-karaktereket és* F*-karaktereket* 2 *és* 3 *karakterisztika esetén. Mik az irreducibilis* F*-reprezentációk?*

Megoldás: $S_3 \cong D_3$-nak két lineáris és egy másodfokú irreducibilis $\mathbb{C}$-reprezentációja van. A lineárisak természetesen irreducibilisek maradnak F fölött is, csak 2 karakterisztika esetén egybeesnek. A másodfokú reprezentációt felírhatjuk abban a bázisban, amelynek elemei az első két komplex harmadik egységgyöknek megfelelő két vektor: $(1,0)$ és $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Ha f a 120°-os forgatás, t pedig az x tengelyre való tükrözés, akkor $1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $f \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $t \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Legyen $\operatorname{char} F = 2$. Ekkor a másodfokú reprezentációnak megfelelő F-reprezentáció: $1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $f \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $t \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ irreducibilis, mert valódi invariáns altere csak akkor lehetne, ha lenne t-nek és f-nek közös sajátvektora, de t sajátaltere csak $\langle(1,0)\rangle$, és $(1,0)$ nem sajátvektora f-nek. Ilyenkor tehát F fölött a triviális reprezentáció és ez a másodfokú irreducibilis reprezentáció létezik. $J(FG) = \langle 1+t \rangle$ 1-dimenziós, és $\dim FG/J(FG) = 1^1 + 2^2$, amiből látszik, hogy több irreducibilis reprezentáció nem lehet. Az irreducibilis Brauer-karakterek $\varphi_1 = \hat{\chi}_1 = \hat{\chi}_2$ és $\varphi_2 = \hat{\chi}_3$.

Legyen most $\operatorname{char} F = 3$. Ekkor a másodfokú reprezentáció nem irreducibilis: az $\langle(1,-1)\rangle$ invariáns altér. A Brauer-karakterekből is leolvasható: $\hat{\chi}_3 = \hat{\chi}_1 + \hat{\chi}_2$. $J(FG)$ 4-dimenziós (ld. a 3. feladatsort), így nincs is más irreducibilis F-reprezentáció.

Összefoglalva: az irreducibilis $\mathbb{C}$-karakterek:

	1	f	t
χ_1:	1	1	1
χ_2:	1	1	-1
χ_3:	2	-1	0

Brauer-karakterek:

$$
mod\, 2: \quad \begin{array}{rrr} & 1 & f \\ \varphi_1: & 1 & 1 \\ \varphi_2: & 2 & -1 \end{array} \qquad mod\, 3: \quad \begin{array}{rrr} & 1 & t \\ \varphi_1: & 1 & 1\,, \\ \varphi_2: & 1 & -1 \end{array}
$$

és F-karakterek:

$$
mod\, 2: \quad \begin{array}{rrrr} & 1 & f & t \\ \psi_1: & 1 & 1 & 1 \\ \psi_2: & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad mod\, 3: \quad \begin{array}{rrrr} & 1 & f & t \\ \psi_1: & 1 & 1 & 1\,, \\ \psi_2: & 1 & 1 & -1 \end{array}
$$

7. *Határozzuk meg S_4 irreducibilis Brauer-karaktereit 2 karakterisztikára. Hány dimenziós az FS_4 Jacobson-radikálja?*

Megoldás: Az irreducibilis $\mathbb{C}$-reprezentációk karakterei és a hozzájuk tartozó Brauer-karakterek:

$$
\begin{array}{rrrrrr} & 1 & (..)(..) & (...) & (..) & (.....) \\ \chi_1: & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \chi_2: & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \chi_3: & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \chi_4: & 3 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ \chi_5: & 3 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} & 1 & (...) \\ \hat{\chi}_1: & 1 & 1 \\ \hat{\chi}_2: & 1 & 1 \\ \hat{\chi}_3: & 2 & -1 \\ \hat{\chi}_4: & 3 & 0 \\ \hat{\chi}_5: & 3 & 0 \end{array}
$$

Látható, hogy $\varphi_1 = \hat{\chi}_1 = \hat{\chi}_2$ lineáris, és $\hat{\chi_4} = \hat{\chi_5} = \hat{\chi}_1 + \hat{\chi}_3$ nem irreducibilis. Lineáris karaktere nem is lehet más, mert $F^{\times}$-ban nincs másodrendű elem, így egy lineáris reprezentáció S_4/A_4-nek csak a triviális reprezentációja lehet. Ebből viszont következik, hogy $\varphi_2 = \hat{\chi}_3$ irreducibilis. Az 5. feladat eredménye szerint S_4 minden irreducibilis reprezentációja $S_4/V \cong S_3$ irreducibilis reprezentációja is, tehát nincs is több irreducibilis karakter. Ebből $\dim J(FG) = 24 - 1^2 - 2^2 = 19$.