1. *Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}$ fölött nem projektív modulusnak nincs projektív fedője.*

Megoldás: Szabad Abel-csoportnak minden részcsoportja szabad, így a projektív modulusok (amelyek szabadoknak direkt összeadandói) éppen a szabad modulusok. Viszont $J(\mathbb{Z}) = 0$, ezért minden szabad modulus radikálja is 0, tehát szabad Abel-csoportnak nincs nem triviális kicsi részcsoportja, vagyis egy szabad Abel-csoport csak önmagának lehet projektív fedője.

2. *Adjuk meg FD_3 direkt felbonthatatlan projektív modulusainak egy-egy kompozícióláncát* $\operatorname{char} F = 3$ *esetén, és az ezekhez tartozó faktorok izomorfiatípusát.*

Megoldás: A 3/8. feladat megoldása szerint $A = FD_3$-ra $A_A = (1+t)A \oplus (1-t)A$ az A_A direkt felbonthatatlan projektív összeadandókra bontása. (Ott $\mathbb{Z}_3$ fölötti csoportalgebrát néztünk, de az irreducibilis reprezentációk lineárisak, a $\mathbb{Z}_3$ algebrai lezártja fölött sem lehet tovább bontani a komponenseket.) Az egyszerű modulusok csak a triviális, S_1, és az a szintén egydimenziós S_2, amelyen t a -1-gyel való szorzással hat. Legyen $P_1 = (1+t)A$ és $P_2 = (1-t)A$.

Ekkor $\operatorname{rad} P_1 = P_1 J(A) = (1+t)A(1-f)A = (1+t)(1-f)A = (1+t-f-tf)A$ egy kodimenziós P_1-ben, és $(1+t)t = 1+t$, tehát a $P_1/P_1 J$ egyszerű modulus csak S_1-gyel lehet izomorf. $P_1 J^2 = (1+t)(1-f)^2 A = (1+t)(1+f+f^2)A = (1+f+f^2+t+tf+tf^2)F$ egydimenziós, és szintén S_1-gyel izomorf. $P_1 J/P_1 J^2$ viszont S_2-vel izomorf, mert $(1+t-f-tf)t = 1+t-tf^2-f^2 \equiv -1-t+f+tf$ modulo $P_1 J^2$. Így P_1 kompozíciólánca: $0 < (1+f+f^2+t+tf+tf^2)F < (1+t-f-tf)A < (1+t)A = P_1$, ahol a faktorok rendre S_1, S_2 és S_1.

A másik projektívre $\operatorname{rad} P_2 = P_2 J = (1-t)(1-f)A = (1-t-f+tf)A$ egy kodimenziós, és $(1-t)t = -1+t$ miatt $P_2/P_2 J$ csak az S_2-vel izomorf egyszerű modulus lehet. $P_2 J^2 = (1-t)(1-f)^2 A = (1-t)(1+f+f^2)A = (1+f+f^2-t-tf-tf^2)A = (1+f+f^2-t-tf-tf^2)F$ egydimenziós, és S_2 típusú. Végül $P_2 J/P_2 J^2 \cong S_1$, ugyanis $(1-t-f+tf)t = -1+t-tf^2+f^2 \equiv 1-t-f+tf$ modulo $P_2 J^2$. Így P_2 kompozíciólánca: $0 < (1+f+f^2-t-tf-tf^2)F < (1-t-f+tf)A < (1-t)A = P_2$, ahol a faktorok rendre S_2, S_1 és S_2.

3. *Tegyük fel, hogy* $\operatorname{char} F = p$, *és V olyan FG-modulus, amelynek minden kompozíciófaktora triviális. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G képe a reprezentációnál p-csoport.*

Megoldás: A kompozíciófaktorok számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha V a triviális egyszerű modulus, akkor a mag a teljes csoport, G pedig 1, tehát igaz az állítás. Most legyen V egy ilyen modulus és $S \leq V$ egyszerű részmodulus, amelyen G triviálisan hat. Legyen H a G csoport V/S-en való hatásának a magja. Az indukciós feltevés szerint $|G : H|$ p-hatvány. Mivel G triviálisan hat S-en, H minden h elemére $1-h \in \operatorname{Ann} S$. Másrészt H a V/S-en való hatás magja, így $1-h \in \operatorname{Ann}(V/S)$. Ebből következik, hogy $V(1-h)^2 \leq S(1-h) = 0$, vagyis $(1-h)^2 \in \operatorname{Ann} V$, és akkor $(1-h)^p \in \operatorname{Ann} V$ is igaz. Viszont $(1-h)^p = 1-h^p$, tehát $h^p \in K$ minden $h \in H$-ra, ahol K a V-n való hatás magját jelöli. Nyilván $K \leq H$, és $K \triangleleft G$, tehát H/K olyan csoport, amelynek minden 1-től különböző eleme p-edrendű, és így H/K p-csoport. Következésképpen $|G : K| = |G : H| \cdot |H : K|$ is p-hatvány, vagyis G képe a V-n való reprezentációnál p-csoport.

4. *Bizonyítsuk be, hogy $p \nmid |G|$ esetén* $\operatorname{Irr} G = \operatorname{IBr} G$.

Megoldás: $|\operatorname{Irr} G| = |\operatorname{IBr} G| = k$ a G összes konjugáltosztályának száma, és mivel FG féligegyszerű, $\sum_{\chi\in\operatorname{Irr} G}\chi(1)^2 = |G| = \sum_{\varphi\in\operatorname{IBr} G}\varphi(1)^2$. Viszont $\sum_{\chi\in\operatorname{Irr} G}\chi(1)^2 = \sum_{\chi\in\operatorname{Irr} G}\hat\chi(1)^2 = \sum_{\chi\in\operatorname{Irr} G}(\sum_{\varphi\in\operatorname{IBr} G} d_{\chi\varphi}\varphi(1))^2 \geq \sum_{\chi\in\operatorname{Irr} G}(\sum_{\varphi\in\operatorname{IBr} G} d_{\chi\varphi}^2\varphi(1)^2) = \sum_{\varphi\in\operatorname{IBr} G}(\sum_{\chi\in\operatorname{Irr} G} d_{\chi\varphi}^2)\varphi(1)^2 \geq \sum_{\varphi\in\operatorname{IBr} G}\varphi(1)^2$, ugyanis minden φ előfordul valamelyik $\hat\chi$-ban komponensként. Mivel minden $d_{\chi\varphi}$ nemnegatív egész, egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha minden φ-re egyetlen $d_{\chi\varphi} = 1$, a többi 0, és minden χ-re is egyetlen $d_{\chi\varphi} \neq 0$ együttható van. Ebből következik, hogy $\operatorname{Irr} G = \operatorname{IBr} G$.

5. *Bizonyítsuk be, hogy ha φ Brauer-karaktere G-nek modulo p, és $H \leq G$, amelyre $p \not| \, |H|$, akkor $\varphi|_H$ karaktere H-nak.*

Megoldás: F-reprezentáció részcsoportra való megszorítása is F-reprezentáció, így G minden Brauer-karakterének megszorítottja H-ra a H-nak Brauer-karaktere. Viszont a 4. feladatból kiderült, hogy H minden Brauer-karaktere közönséges karakter.

6. *Határozzuk meg A_5 irreducibilis Brauer-karaktereit modulo 2.*

Megoldás: A_5 karaktertáblája és az irreducibilis karakterekhez tartozó Brauer-karakterek:

	1	(..)(..)	(...)	$(.....)^1$	$(.....)^2$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	4	0	1	-1	-1
χ_3	5	1	-1	0	0
χ_4	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt5}{2}$	$\frac{1-\sqrt5}{2}$
χ_5	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt5}{2}$	$\frac{1+\sqrt5}{2}$

	1	(...)	$(.....)^1$	$(.....)^2$
$\hat\chi_1$	1	1	1	1
$\hat\chi_2$	4	1	-1	-1
$\hat\chi_3$	5	-1	0	0
$\hat\chi_4$	3	0	$\frac{1+\sqrt5}{2}$	$\frac{1-\sqrt5}{2}$
$\hat\chi_5$	3	0	$\frac{1-\sqrt5}{2}$	$\frac{1+\sqrt5}{2}$

A kapott Brauer-karakterek közül $\chi_1 = \varphi_1$ irreducibilis, mert lineáris, és $\hat\chi_1 + \hat\chi_3 = \hat\chi_4 + \hat\chi_5$. Az utóbbiból következik, hogy φ_1 összeadandója $\hat\chi_4$ és $\hat\chi_5$ valamelyikének, de mivel ezek S_5-ben konjugáltak, φ_1-et pedig a konjugálás helyben hagyja, mindkettőben szerepelnie kell φ_1-nek. Mivel A_5 egyszerű, F fölött nem lehet más lineáris karakter, mint a triviális, tehát $\hat\chi_4 - \varphi_1$ és $\hat\chi_5 - \varphi_1$ csak akkor bomolhatna tovább, ha $2\varphi_1$-gyel lenne egyenlő. Tehát $\varphi_2 = \hat\chi_4 - \varphi_1$ és $\varphi_3 = \hat\chi_5 - \varphi_1$ irreducibilis Brauer-karakterek. Ezeken kívül már csak egy irreducibilis Brauer-karakter létezhet.

Ha $\hat\chi_2$ nem lenne irreducibilis, akkor vagy összeadandója a φ_1, vagy $\hat\chi_2 = \varphi_2 + \varphi_3$ (ez láthatóan nem igaz), vagy $\hat\chi_2 = 2\varphi_4$ lenne, és az utóbbi esetben φ_4 értékei nem lennének algebrai egészek. Abban az esetben, ha $\hat\chi_2 - \varphi_1$ Brauer-karakter, a megszorítása $\langle(12345)\rangle$-re közönséges karakter lenne az 5. feladat szerint, de könnyen látható, hogy $(\hat\chi_2 - \varphi_1)((12345)) = -2$ nem áll elő három ötödik egységgyök összegeként. Tehát $\varphi_4 = \hat\chi_2$ a negyedik irreducibilis Brauer-karakter, és az irreducibilis Brauer-karakterek táblázata:

	1	(...)	$(.....)^1$	$(.....)^2$
φ_1	1	1	1	1
φ_2	2	-1	$\frac{-1+\sqrt5}{2}$	$\frac{-1-\sqrt5}{2}$
φ_3	2	-1	$\frac{-1-\sqrt5}{2}$	$\frac{-1+\sqrt5}{2}$
φ_4	4	1	-1	-1

Megjegyzés: Egy később tanult tételből közvetlenül is adódik, hogy $\hat\chi_2$ irreducibilis, ugyanis χ_2 0 defektű, azaz 2-nek maximális hatványával osztható a foka.

7. (**Hf**) *Határozzuk meg S_4 irreducibilis Brauer-karaktereit modulo 3. Állapítsuk meg ebből $\overline{\mathbb{Z}_3}S_4$ Jacobson-radikáljának és direkt felbonthatatlan projektív modulusainak dimenzióját.*

8. (**Hf**) *Legyen $H \leq G$, $p \not| \ |H|$, és Φ_1 a triviális Brauer-karakterhez tartozó p-projektív karakter. Bizonyítsuk be, hogy Φ_1 direkt összeadandója $(1_H)^G$-nek.*