1. *Határozzuk meg A_5 irreducibilis Brauer-karaktereit modulo 3 és modulo 5.*

Megoldás: A_5 karaktertáblája:

	1	$(..)(..)$	$(...)$	$(.....)^1$	$(.....)^2$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	4	0	1	-1	-1
χ_3	5	1	-1	0	0
χ_4	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ_5	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

és a megfelelő Brauer-karakterek modulo 3 és 5:

	1	$(..)(..)$	$(.....)^1$	$(.....)^2$
$\hat\chi_1$	1	1	1	1
$\hat\chi_2$	4	0	-1	-1
$\hat\chi_3$	5	1	0	0
$\hat\chi_4$	3	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
$\hat\chi_5$	3	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

	1	$(..)(..)$	$(...)$
$\hat\chi_1$	1	1	1
$\hat\chi_2$	4	0	1
$\hat\chi_3$	5	1	-1
$\hat\chi_4$	3	-1	0
$\hat\chi_5$	3	-1	0

Mivel A_5 egyszerű, mindkét esetben egyetlen lineáris F-reprezentáció van, és az ehhez tartozó Brauer-karakter $\varphi_1 = \hat\chi_1$.

Modulo 3 χ_4 és χ_5 0 defektű, így $\varphi_2 = \hat\chi_4$ és $\varphi_3 = \hat\chi_5$ irreducibilisek. $\hat\chi_3 = \hat\chi_1 + \hat\chi_2$ reducibilis. Végül $\hat\chi_2$ akkor lehetne reducibilis, ha vagy $\hat\chi_2 = 2\varphi_4$, de akkor φ_4 értékei nem lennének algebraiak, vagy $\hat\chi_2 - \varphi_1$ Brauer-karakter, így a megszorítása a $\langle(12345)\rangle$ csoportra közönséges karakter lenne, de könnyen láthatóan nem az (ld. a 8/6. feladat megoldását). Tehát $\varphi_4 = \hat\chi_2$.

Modulo 5 χ_3 0 defektű, ezért $\varphi_2 = \hat\chi_3$ irreducibilis. Továbbá $\hat\chi_4 = \hat\chi_5$, és $\hat\chi_2 = \hat\chi_1 + \hat\chi_4$, tehát csak az a kérdés, hogy $\hat\chi_4$ irreducibilis-e. De ha reducibilis, akkor $\hat\chi_4 - \varphi_1$ Brauer-karakter, de a Klein-csoportra való megszorítása ennek sem karakter. Tehát $\varphi_3 = \hat\chi_4$. Összefoglalva az irreducibilis Brauer-karakterek:

	1	$(..)(..)$	$(.....)^1$	$(.....)^2$
φ_1	1	1	1	1
φ_2	3	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
φ_3	3	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
φ_4	4	0	-1	-1

, illetve

	1	$(..)(..)$	$(...)$
φ_1	1	1	1
φ_2	5	1	-1
φ_3	3	-1	0

2. *Bizonyítsuk be, hogy egy p karakterisztikájú, algebrailag zárt F testre FG akkor és csak akkor bázisalgebra, ha G' p-csoport.*

Megoldás: Mivel $A = FG$-re $A/J(A)$ F fölötti mátrixgyűrűk direkt összege, és a modulusfelbontásában pontosan az egy mátrixgyűrűhöz tartozó egyszerűek izomorfak, A akkor és csak akkor bázisalgebra, ha $A/J(A) \cong \oplus F$, azaz ha minden irreducibilis F-reprezentáció lineáris.

Ha G' p-csoport, akkor a 7/5. feladat miatt G' benne van minden irreducibilis reprezentáció magjában, azaz minden irreducibilis reprezentáció a G/G' Abel-csoport irreducibilis reprezentációja. Abel-csoportnak viszont csak lineáris irrecucibilis reprezentációi vannak algebrailag zárt test fölött, ugyanis a Schur-lemma miatt a kép minden eleme skalármátrix.

Ha minden irreducibilis F-reprezentáció lineáris, akkor ezek G-nek $F^{\times}$-ba menő homomorfizmusai, így G' benne van mindegyiknek a magjában. Ebből következik, hogy minden $x \in G'$ triviálisan hat minden irreducibilis moduluson, azaz $1 - x$ annullálja az összes egyszerű modulust. De $J(A)$ éppen az egyszerű modulusok annullátorainak metszete, tehát $1 - x \in J(A)$ minden $x \in G'$-re. $J(A)$ nilpotens, ezért valamilyen hatványa 0, és így van olyan k, hogy $J(A)^{p^k} = 0$, következésképpen $0 = (1-x)^{p^k} = 1 - x^{p^k}$, vagyis G' minden eleme p-hatványrendű, tehát G' p-csoport.

3. *Adjuk meg az A algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha $A = K\Gamma/I$, ahol Γ:*
$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, shift left, "\alpha"] & \overset{2}{\bullet} \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[loop right, "\gamma"] \end{tikzcd}$$
és

a) $I = (\alpha\gamma, \gamma^2, \gamma\beta, \alpha\beta\alpha, \beta\alpha\beta)$;

b) $I = (\alpha\gamma^2, \gamma^2 - \beta\alpha, \alpha\beta)$.

4. *Lehet-e az alábbi egy $K\Gamma/I$ algebra reguláris jobbmodulusának Loewy-diagramja? Ha igen, adjuk meg a Γ gráfot és az I ideálnak egy generátorrendszerét.*

a) $\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}$ *b)* $\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix}$ *c)* $\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus 3$

5. *Legyen $A = K\Gamma/I$ az az algebra, amelynek reguláris jobbmodulusa $A_A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}$. Határozzuk meg*

a) *az $\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$ modulus összes részmodulusát és az ezekkel vett faktorainak Loewy-diagramját;*

b) *az összes lehetséges X modulus Loewy-diagramját (direkt felbonthatatlanok összegére bontva az X-et), amelyre*
$$\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \to X \to 0$$
egzakt;

c) *az $\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$ modulus projektív fedőjét, és a projektív fedés magját. Folytassuk a projektív feloldást!*

6. *Írjuk fel az 5. feladatbeli A fölötti reguláris balmodulus, azaz az A^{opp} (az A alaphalmazán definiált, fordított sorrendben megadott szorzással megadott algebra) fölötti reguláris jobbmodulus Loewy-diagramját.*

7. *Határozzuk meg az 5. és 6. feladat modulusainak K-duálisát. Mik az adott algebra direkt felbonthatatlan injektív modulusai?*