Gyűrűk és csop. repr. **2. zh** *2010. december 8.*

I. rész. *Ebben a részben minden helyes válasz 3 pontot ér. Indokolni nem kell. A választ a keretbe írjuk!*

1. Egészítsük ki a következő tételt egy karakterekre vonatkozó feltétellel: Egy G csoport p-Sylow-részcsoportjának akkor és csak akkor van Abel-féle normál komplementuma, ha…

2. Tegyük fel, hogy $\chi \in \operatorname{Irr} G$, $\chi(1) = 5$, $N \triangleleft G$, és $|N| = 6$. Hányadfokú lehet χ_N legmagasabb fokú irreducibilis komponense?

3. Definiáljuk az S_n irreducibilis reprezentációihoz tartozó $e(D)$ "előidempotens" elemeket!

4. Mivel egyenlő $(1+i)^*$, ha $^* : R \to R/M$ az algebrai egészek gyűrűjéből a $\mathbb{Z}_2$ algebrai lezártjába menő gyűrűhomomorfizmus?

5. Definiáljuk egy F-reprezentáció Brauer-karakterét!

6–7. Határozzuk meg a D_5 diédercsoport közönséges irreducibilis karaktereinek fokát,

irreducibilis Brauer-karaktereinek számát,

és irreducibilis Brauer-karaktereinek fokát!

8. Adjuk meg az $A = K\Gamma/I$ algebra dimenzióját, ha

$$\Gamma: \quad \begin{tikzcd} \underset{1}{\bullet} \arrow[r, shift left, "\alpha"] & \underset{2}{\bullet} \arrow[l, shift left, "\beta"] & \underset{3}{\bullet} \arrow[l, "\gamma"'] \end{tikzcd} ; \qquad I = \langle \beta\alpha\beta, \gamma\beta\alpha \rangle.$$

9. Mikor tartozik két irreducibilis komplex karakter egy p-blokkba?

10. Definiáljuk az injektív modulus fogalmát és mondjuk ki a Baer-kritériumot!

II. rész.

11. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a Brauer-tételt. (20 *pont*)