$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & Y \\ Z & \end{tikzcd}$$ pushoutja $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & Y \arrow[d, "\delta"] \\ Z \arrow[r, "\gamma"] & U \end{tikzcd}$$ ha $\forall\, U', \gamma', \delta'$ $\exists!\, \varepsilon$, hogy $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & Y \arrow[d, "\delta"'] \arrow[ddr, "\delta'"] & \\ Z \arrow[r, "\gamma"] \arrow[drr, "\gamma'"'] & U \arrow[dr, dashed, "\varepsilon"] & \\ & & U' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "\beta"] \\ Y \arrow[r, "\alpha"'] & X \end{tikzcd}$$ pullbackje $$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[d, "\delta"] & Z \arrow[d, "\beta"] \\ Y \arrow[r, "\alpha"'] & X \end{tikzcd}$$ ha $\forall\, V', \gamma', \delta'$ $\exists!\, \varepsilon$, hogy $$\begin{tikzcd} V' \arrow[dr, dashed, "\varepsilon"'] \arrow[drr, "\gamma'"] \arrow[ddr, "\delta'"'] & & \\ & V \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[d, "\delta"] & Z \arrow[d, "\beta"] \\ & Y \arrow[r, "\alpha"'] & X \end{tikzcd}$$

1. Bizonyítsuk be, hogy $Y \xleftarrow[\alpha]{} X \xrightarrow[\beta]{} Z$-hez $U = Y \oplus Z / \{(x\alpha, -x\beta) \,|\, x \in X\}$ a $\gamma : z \mapsto \overline{(0,z)}$ és $\delta : y \mapsto \overline{(y,0)}$ homomorfizmusokkal pushout.

2. Konstruáljunk pullbacket $Y \xrightarrow[\alpha]{} X \xleftarrow[\beta]{} Z$-hez.

3. Bizonyítsuk be, hogy modulusok direkt szorzata a kategóriaelméleti szorzatuk, modulusok direkt összege pedig a kategróriaelméleti koszorzatuk.

4. Bizonyítsuk be, hogy projektív modulusok direkt összege projektív, és injektív modulusok direkt szorzata injektív.

5. Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{Hom}_R(\oplus M_i, N) \cong \prod \mathrm{Hom}_R(M_i, N)$.

6. Bizonyítsuk be hogy $\mathrm{End}(R_R) \cong R$, ha az endomorfizmusokat balról írjuk.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $e \in R$ idempotens, azaz $e^2 = e$, akkor eR projektív jobb R-modulus.

8*. Bizonyítsuk be, hogy $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ nem projektív.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha A véges dimenziós K-algebra, és $M \in \text{mod-}A$, akkor $D^2(M) \cong M$.

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy egy P modulus akkor és csak akkor projektív, ha van olyan szabad F modulus, melyre $F \cong F \oplus P$

Hf2. Egy M_R modulusban $\{(x_i, f_i) \,|\, i \in I\}$ *duális bázis*, ha $x_i \in M$, $f_i \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$ minden i-re, és
(1) minden $x \in M$-re $xf_i = 0$ teljesül véges sok index kivételével;
(2) minden $x \in M$-re $x = \sum_{i \in I} x_i(xf_i)$.
Bizonyítsuk be, hogy M akkor és csak akkor projektív, ha van duális bázisa.