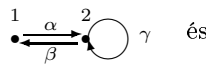


1. Tegyük fel, hogy G osztható Abel-csoport.
- Bizonyítsuk be, hogy ha $g \in G$, akkor $o(g) = \infty$ esetén g belefoglalható G egy olyan direkt komponensébe, amely \mathbb{Q} -val izomorf, ha pedig $o(g) = p^n$ valamely p prímre és $n \geq 1$ -re, akkor g beágyazható G egy \mathbb{Z}_{p^∞} -nel izomorf direkt komponensébe.
 - Bizonyítsuk be, hogy a G csoport \mathbb{Q} -knak és \mathbb{Z}_{p^∞} -eknek direkt összege.
2. Adjuk meg az A algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha $A = K\Gamma/I$, ahol Γ :  és
- $I = (\alpha\gamma, \gamma^2, \gamma\beta, \alpha\beta\alpha, \beta\alpha\beta)$;
 - $I = (\alpha\gamma^2, \gamma^2 - \beta\alpha, \alpha\beta)$.
3. Lehet-e az alábbi egy $K\Gamma/I$ algebra reguláris jobbmodulusának Loewy-diagramja? Ha igen, adjuk meg a Γ gráfot és az I ideálnak egy generátorrendszerét.
- $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}$
 - $\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}$
 - $\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \oplus 3$
4. Legyen $A = K\Gamma/I$ az algebra, amelynek reguláris jobbmodulusa $A_A = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}$. Határozzuk meg az $\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$ modulus összes részmodulusát és az ezekkel vett faktorainak Loewy-diagramját.
- Egy M modulus maximumfeltételes (ill. minimumfeltételes), ha részmodulusok minden részhalmazában van maximális (ill. minimális).*
- Egy X részmodulus kicsi M -ben ($X \ll M$), ha minden $Y \leq M$ -re $X+Y = M$ -ből következik, hogy $Y = M$.*
5. Bizonyítsuk be, hogy ha $Y \leq X \ll M$ és $Z \leq M$, akkor
- $Y \ll M$;
 - $\overline{X} \ll M/Z$, ahol $\overline{X} = (X+Z)/Z$ az X képe a Z -vel való faktorizálásnál.
6. Lássuk be, hogy egy R gyűrűben egy a elem akkor és csak akkor van benne egy nilpotens jobbideálban, ha egy nilpotens balideálban is benne van.
7. Bizonyítsuk be, hogy egy modulus akkor és csak akkor maximum- és minimumfeltételes, ha van véges kompozíciólánca.
8. Tegyük fel, hogy egy R gyűrűre R_R maximum- és minimumfeltételes. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek R tetszőleges J jobbideáljára.
- J nilpotens;
 - J annullál minden egyszerű jobb R -modulust;
 - minden véges kompozícióláncú jobb R -modulust annullál J -nek egy alkalmas hatványa.
9. Definiáljuk a $J(R)$ Jacobson-radikált úgy, mint az R maximális jobbideáljainak (azaz R_R maximális részmodulusainak) metszetét. Bizonyítsuk be, hogy ha R_R minimum- és maximumfeltételes, akkor
- $J(R)$ a legkisebb (azaz minden más ilyenben benne levő) olyan jobbideál, hogy az R_R -nek ezzel vett faktormodulusa félegyszerű.
 - $J(R)$ a legnagyobb (azaz minden más ilyen tartalmazó) nilpotens jobbideál.
 - $J(R)$ az egyetlen olyan jobbideál, amelyre $R_R/J(R)$ félegyszerű és $J(R)$ nilpotens.
10. Bizonyítsuk be minimum- és maximumfeltételes R_R esetén, hogy $J(R)$ ideál, és ugyanezt az ideált kapjuk, ha $J(R)$ -et R maximális balideáljainak metszeteként definiáljuk.
11. (Fitting-lemma) Bizonyítsuk be, hogy ha M maximum- és minimumfeltételes modulus, és $\varphi \in \text{End}(M)$, akkor van olyan n , amelyre $M = \text{Ker } \varphi^n \oplus \text{Im } \varphi^n$.
- Hf1.** Egy R gyűrűt *öninjektívnek* hívunk, ha R_R injektív. Bizonyítsuk be, hogy \mathbb{Z} minden valódi faktorgyűrűje injektív, de \mathbb{Z} nem.
- Hf2.** Írjuk fel az $A = K\Gamma/I$ algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha
- $$\Gamma : 1 \begin{matrix} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{matrix} 2 \begin{matrix} \xrightarrow{\gamma} \\ \xleftarrow{\delta} \end{matrix} 3, \quad I = (\alpha\beta, \beta\alpha - \gamma\delta, \delta\beta, \delta\gamma)$$
- Hf3.** Legyen M maximum-feltételes modulus. Bizonyítsuk be, hogy $\text{rad } M$ a legnagyobb olyan részmodulus, amely kicsi M -ben.