**1.** Tegyük fel, hogy $G$ osztható Abel-csoport.

a) Bizonyítsuk be, hogy ha $g \in G$, akkor $o(g) = \infty$ esetén $g$ belefoglalható $G$ egy olyan direkt komponensébe, amely $\mathbb{Q}$-val izomorf, ha pedig $o(g) = p^n$ valamely $p$ prímre és $n \geq 1$-re, akkor $g$ beágyazható $G$ egy $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-nel izomorf direkt komponensébe.

b) Bizonyítsuk be, hogy a $G$ csoport $\mathbb{Q}$-knak és $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-eknek direkt összege.

**2.** Adjuk meg az $A$ algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha $A = K\Gamma/I$, ahol $\Gamma$: $\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, shift left, "\alpha"] & \overset{2}{\bullet} \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[loop right, "\gamma"] \end{tikzcd}$ és

a) $I = (\alpha\gamma, \gamma^2, \gamma\beta, \alpha\beta\alpha, \beta\alpha\beta)$;

b) $I = (\alpha\gamma^2, \gamma^2 - \beta\alpha, \alpha\beta)$.

**3.** Lehet-e az alábbi egy $K\Gamma/I$ algebra reguláris jobbmodulusának Loewy-diagramja? Ha igen, adjuk meg a $\Gamma$ gráfot és az $I$ ideálnak egy generátorrendszerét.

a) $\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}$ b) $\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix}$ c) $\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus 3$

**4.** Legyen $A = K\Gamma/I$ az az algebra, amelynek reguláris jobbmodulusa $A_A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}$. Határozzuk meg az $\begin{smallmatrix} & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & \end{smallmatrix}$ modulus összes részmodulusát és az ezekkel vett faktorainak Loewy-diagramját.

*Egy $M$ modulus maximumfeltételes (ill. minimumfeltételes), ha részmodulusok minden részhalmazában van maximális (ill. minimális).*
*Egy $X$ részmodulus kicsi $M$-ben ($X << M$), ha minden $Y \leq M$-re $X + Y = M$-ből következik, hogy $Y = M$.*

**5.** Bizonyítsuk be, hogy ha $Y \leq X << M$ és $Z \leq M$, akkor

a) $Y << M$;

b) $\overline{X} << M/Z$, ahol $\overline{X} = (X + Z)/Z$ az $X$ képe a $Z$-vel való faktorizálásnál.

**6.** Lássuk be, hogy egy $R$ gyűrűben egy $a$ elem akkor és csak akkor van benne egy nilpotens jobbideálban, ha egy nilpotens balideálban is benne van.

**7.** Bizonyítsuk be, hogy egy modulus akkor és csak akkor maximum- és minimumfeltételes, ha van véges kompozíciólánca.

**8.** Tegyük fel, hogy egy $R$ gyűrűre $R_R$ maximum- és minimumfeltételes. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek $R$ tetszőleges $J$ jobbideáljára.

(i) $J$ nilpotens;

(ii) $J$ annullál minden egyszerű jobb $R$-modulust;

(iii) minden véges kompozícióláncú jobb $R$-modulust annullál $J$-nek egy alkalmas hatványa.

**9.** Definiáljuk a $J(R)$ Jacobson-radikált úgy, mint az $R$ maximális jobbideáljainak (azaz $R_R$ maximális részmodulusainak) metszetét. Bizonyítsuk be, hogy ha $R_R$ minimum- és maximumfeltételes, akkor

a) $J(R)$ a legkisebb (azaz minden más ilyenben benne levő) olyan jobbideál, hogy az $R_R$-nek ezzel vett faktormodulusa féligegyszerű.

b) $J(R)$ a legnagyobb (azaz minden más ilyet tartalmazó) nilpotens jobbideál.

c) $J(R)$ az egyetlen olyan jobbideál, amelyre $R_R/J(R)$ féligegyszerű és $J(R)$ nilpotens.

**10.** Bizonyítsuk be minimum- és maximumfeltételes $R_R$ esetén, hogy $J(R)$ ideál, és ugyanezt az ideált kapjuk, ha $J(R)$-et $R$ maximális balideáljainak metszeteként definiáljuk.

**11.** (Fitting-lemma) Bizonyítsuk be, hogy ha $M$ maximum- és minimumfeltételes modulus, és $\varphi \in \mathrm{End}(M)$, akkor van olyan $n$, amelyre $M = \mathrm{Ker}\,\varphi^n \oplus \mathrm{Im}\,\varphi^n$.

**Hf1.** Egy $R$ gyűrűt *öninjektívnek* hívunk, ha $R_R$ injektív. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}$ minden valódi faktorgyűrűje injektív, de $\mathbb{Z}$ nem.

**Hf2.** Írjuk fel az $A = K\Gamma/I$ algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha

$$\Gamma : 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\delta}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} 3, \qquad I = (\alpha\beta, \beta\alpha - \gamma\delta, \delta\beta, \delta\gamma)$$

**Hf3.** Legyen $M$ maximum-feltételes modulus. Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{rad}\, M$ a legnagyobb olyan részmodulus, amely kicsi $M$-ben.