Gyűrűk és csop. repr. **4. feladatsor** *2011. október 6.*

1. Tegyük fel, hogy $R = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$, ahol minden P_i direkt felbonthatatlan modulus. Nevezzük P_i-t és P_j-t szomszédosnak, ha $\mathrm{Hom}(P_i, P_j) \neq 0$ vagy $\mathrm{Hom}(P_j, P_i) \neq 0$, és legyenek $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_t$ az így kapott gráf összefüggő komponensei. Bizonyítsuk be, hogy $\oplus\{\, P_i \mid P_i \in \mathcal{K}_j \,\}$ direkt felbonthatatlan ideálja R-nek minden j-re, és R ezeknek a direkt felbonthatatlan gyűrűknek a direkt összege.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0$ Auslander–Reiten-sorozat, akkor $0 < Z_1 < Z$ részmodulusra a $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Z_1\beta^{-1} \xrightarrow{\beta} Z_1 \longrightarrow 0$ sorozat felhasadó.

3. Legyen $A_A = \begin{smallmatrix}1\\3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$. Adjuk meg az egyszerű modulusok Auslander–Reiten-eltoltjait.

4. Legyen $A_A = P_1 \oplus P_2$, ahol $P_1 = \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}$ és $P_2 = \begin{smallmatrix}2\\2\\2\end{smallmatrix}$, továbbá $P_1^* = \mathrm{Hom}(P_1, A_A)$ és $P_2^* = \mathrm{Hom}(P_2, A_A)$. Rajzoljuk föl a P_1^* és P_2^* bal A-modulusok Loewy-diagramját. Ha az $\alpha : P_2 \to P_1$ homomorfizmus képe egydimenziós, akkor mi az ennek megfelelő $\alpha^* : P_1^* \to P_2^*$ homomorfizmus a Loewy-diagramokon megadva? Határozzuk meg ennek segítségével az $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ modulus AR-eltoltját.

5. Határozzuk meg az A algebra Auslander–Reiten-gráfját, ha $A_A = \begin{smallmatrix}1\\3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$.

6. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbb{Z}_3 D_3$ csoportalgebra izomorf azzal a $\mathbb{Z}_3$ fölötti gráfalgebrával, amelyre a jobb reguláris modulus Loewy-diagramja $\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix}$.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha a K test karakterisztikája p, akkor egy tetszőleges G véges p-csoport KG csoportalgebrájának Jacobson-radikálja azokból az elemekből áll, amelyekben az együtthatók összege 0. Hány nem izomorf egyszerű modulus van KG fölött?

Hf1. Legyen $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow Z \to 0$ egzakt sorozat. Bizonyítsuk be, hogy ha α irreducibilis, és $\mathrm{Im}\,\alpha \leq Y_1 < Y$, akkor $\mathrm{Im}\,\alpha$ direkt összeadandója Y_1-nek.

Hf2. Legyen $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$. Adjuk meg a $\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}$ modulus Auslander–Reiten-eltoltját.