$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & Y \\ Z & \end{tikzcd}
\quad \text{pushoutja} \quad
\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & Y \arrow[d, "\delta"] \\ Z \arrow[r, "\gamma"] & U \end{tikzcd}
\quad \begin{matrix}\text{ha } \forall\, U', \gamma', \delta' \\ \exists!\, \varepsilon, \text{ hogy}\end{matrix} \quad
\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & Y \arrow[d, "\delta"] \arrow[ddr, "\delta'"] & \\ Z \arrow[r, "\gamma"] \arrow[drr, "\gamma'"'] & U \arrow[dr, dashed, "\varepsilon"] & \\ & & U' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "\beta"] \\ Y \arrow[r, "\alpha"'] & X \end{tikzcd}
\quad \text{pullbackje} \quad
\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[d, "\delta"] & Z \arrow[d, "\beta"] \\ Y \arrow[r, "\alpha"'] & X \end{tikzcd}
\quad \begin{matrix}\text{ha } \forall\, V', \gamma', \delta' \\ \exists!\, \varepsilon, \text{ hogy}\end{matrix} \quad
\begin{tikzcd} V' \arrow[dr, dashed, "\varepsilon"'] \arrow[drr, "\gamma'"] \arrow[ddr, "\delta'"'] & & \\ & V \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[d, "\delta"] & Z \arrow[d, "\beta"] \\ & Y \arrow[r, "\alpha"'] & X \end{tikzcd}$$

1. *Bizonyítsuk be, hogy* $Y \underset{\alpha}{\longleftarrow} X \underset{\beta}{\longrightarrow} Z$*-hez* $U = Y \oplus Z / \{(x\alpha, -x\beta) \mid x \in X\}$ *a* $\gamma : z \mapsto \overline{(0,z)}$ *és* $\delta : y \mapsto \overline{(y,0)}$ *homomorfizmusokkal pushout.*

Megoldás: Könnyen látható, hogy U részmodulus, és γ, δ homomorfizmusok, továbbá, hogy az eredeti diagramot kommutatívvá egészítik ki, ugyanis $x\alpha\delta - x\beta\gamma = \overline{(x\alpha,0)} - \overline{(0,x\beta)} = \overline{(x\alpha,-x\beta)} = 0$ minden $x \in X$-re. Ha U', γ', δ' még egy kommutatív diagramot ad, akkor legyen $\varphi : Y \oplus Z \to U'$, $(y,z) \mapsto y\delta' + z\gamma'$. Ez nyilván homomorfizmus, és $\{(x\alpha, -x\beta) \mid x \in X\} \leq \operatorname{Ker}\varphi$, mert $(x\alpha, -x\beta)\varphi = x\alpha\delta' - x\beta\gamma' = 0$. Így φ indukál egy $\varepsilon : U \to U'$ homomorfizmust az $\varepsilon : \overline{(y,z)}\varphi = y\delta' + z\gamma'$ definícióval (jól definiált, mert egy mellékosztályban levők különbségét 0-ba viszi, és műveletartó, mert φ is az). Erre valóban igaz, hogy $y\delta\varepsilon = \overline{(y,0)}\varepsilon = y\delta'$, és $z\gamma\varepsilon = z\gamma'$. Az ε homomorfizmus egyértelmű, ugyanis minden megfelelő ε'-re $\overline{(y,0)}\varepsilon' = y\delta\varepsilon' = y\delta' = \overline{(y,0)}\varepsilon$, és ugyanígy $\overline{(0,z)}\varepsilon' = z\gamma\varepsilon' = z\gamma' = \overline{(0,z)}\varepsilon$, az $\overline{(y,0)}$ és $\overline{(0,z)}$ alakú elemek pedig generálják U-t, tehát $\varepsilon = \varepsilon'$ az egész U-n.

2. *Konstruáljunk pullbacket* $Y \underset{\alpha}{\longrightarrow} X \underset{\beta}{\longleftarrow} Z$*-hez.*

Megoldás: Legyen $V = \{(y,z) \mid y\alpha = z\beta\} \leq Y \oplus Z$, és $\gamma : (y,z) \to z$, $\delta : (y,z) \to y$. Így nyilván kommutatív diagramot kapunk. Ha V' a γ', δ' homomorfizmusokkal szintén kommutatív diagrammá egészíti ki az eredetit, akkor legyen $\varepsilon : V' \to V$, $v'\varepsilon = (v'\delta', v'\gamma')$. Ez nyilván homomorfizmus $Y \oplus Z$-be, és V-be képez, ugyanis $v'\delta'\alpha = v'\gamma'\beta$. Továbbá $v'\varepsilon\gamma = (v'\delta', v'\gamma')\gamma = v'\gamma'$, és ugyanígy $v'\varepsilon\delta = v'\delta'$ minden $v' \in V'$-re. Végül ε egyértelmű, ugyanis ha ε' is megfelel, és $v'\varepsilon' = (y,z)$, akkor $v'\gamma' = v'\varepsilon'\gamma = (y,z)\gamma = z$, és $v'\delta' = v'\varepsilon'\delta = (y,z)\delta = y$, tehát $v'\varepsilon' = (v'\delta', v'\gamma') = v'\varepsilon$.

3. *Bizonyítsuk be, hogy modulusok direkt szorzata a kategóriaelméleti szorzatuk, modulusok direkt összege pedig a kategróriaelméleti koszorzatuk.*

Megoldás: Az M_i modulusok kategóriaelméleti *szorzata* egy M modulus a $\varphi_i : M \to M_i$ morfizmusokkal ($i \in I$), ha minden U modulusra és hozzá tartozó $\psi_i : U \to M_i$ morfizmusokra egyértelműen van olyan $\varepsilon : U \to M$ morfizmus, amelyre $\psi_i = \varepsilon\varphi_i$ ($i \in I$). Az M_i modulusok kategóriaelméleti *koszorzata* egy N modulus a $\varphi_i : M_i \to N$ morfizmusokkal, ha minden U modulusra és hozzá tartozó $\psi_i : M_i \to U$ morfizmusokra egyértelműen van olyan $\varepsilon : N \to U$ morfizmus, amelyre $\psi_i = \varphi_i\varepsilon$ ($i \in I$). Az ε egyértelműségéből könnyen belátható, hogy a szorzat és a koszorzat izomorfia erejéig egyértelmű.

szorzat:
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi_i"] & M_i \\ U \arrow[u, dashed, "\varepsilon"] \arrow[ur, "\psi_i"'] & \end{tikzcd}$$

koszorzat:
$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, dashed, "\varepsilon"'] & M_i \arrow[l, "\varphi_i"'] \arrow[dl, "\psi_i"] \\ U & \end{tikzcd}$$

Válasszuk az előbbi definíció M-jének a $\prod_{i\in I} M_i$-t a $\pi_i : M \to M_i$ vetítésekkel a komponensekre. Ekkor $u \in U$-ra $u\varepsilon$ legyen a direkt szorzatnak az az eleme, amelynek i-edik komponense $u\psi_i$. Ez nyilván modulus-homomorfizmus, és teljesíti a kommutativitási feltételt. Továbbá a $\psi_i = \varepsilon\pi_i$ feltétel miatt ε nem is lehet más.

A koszorzat definíciójában szereplő N legyen $\oplus_{i\in I} M_i$ a $\iota_i : M_i \to N$ természetes beágyazásokkal. Ha az $x \in N$ elem i-edik komponense x_i, akkor legyen $x\varepsilon = \sum x_i\psi_i$ (ennek van értelme, mert csak véges sok x_i nem 0). Itt is könnyű ellenőrizni, hogy így homomorfizmust kapunk, amely teljesíti a kommutativitási feltételt. Továbbá ε egyértelmű, mert az N i-edik komponensén ψ_i-vel kell megegyeznie, és a komponensek kigenerálják N-et.

4. *Bizonyítsuk be, hogy projektív modulusok direkt összege projektív, és injektív modulusok direkt szorzata injektív.*

Megoldás: Legyenek M_i-k projektívek, $\alpha : X \to Y$ szürjektív, és $\beta : \oplus M_i \to Y$. Ekkor M_i projektivitásából következik, hogy van olyan $\psi_i : M_i \to X$, amelyre $\psi_i\alpha = \iota_i\beta$ minden i-re. Ekkor viszont a koszorzat definíciója miatt van olyan $\varepsilon : \oplus M_i \to X$, amelyre $\psi_i = \iota_i\varepsilon$ minden i-re. Következésképpen $\iota_i\beta = \psi_i\alpha = \iota_i\varepsilon\alpha$, tehát $\beta = \varepsilon\alpha$ a $\oplus M_i$ minden komponensén, és így $\oplus M_i$-n is.

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[d, "\iota_i"] \arrow[ddl, dashed, "\psi_i"'] \\ & \oplus M_i \arrow[d, "\beta"] \arrow[dl, dashed, "\varepsilon"] \\ X \arrow[r, two heads, "\alpha"'] & Y \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & Y \arrow[dl, dashed, "\varepsilon"'] \arrow[ddl, dashed, "\psi_i"] \\ \prod M_i \arrow[d, "\pi_i"'] & \\ M_i & \end{tikzcd}$$

Most legyenek M_i-k injektív modulusok, $\alpha : X \to Y$ injektív homomorfizmus, és $\beta : X \to \prod M_i$. Ekkor az M_i injektivitása miatt van olyan $\psi_i : Y \to M_i$ homomorfizmus minden i-re, amelyre $\alpha\psi_i = \beta\pi_i$. Most a kategóriaelméleti szorzat definíciójából következik, hogy van olyan $\varepsilon : Y \to \prod M_i$, amelyre $\varepsilon\pi_i = \psi_i$ minden i-re. Következésképpen $\alpha\varepsilon\pi_i =$

$\alpha\psi_i = \beta\pi_i$ minden i-re. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $x \in X$-re $x\alpha\varepsilon$ és $x\beta$ minden komponense megegyezik, azaz $\alpha\varepsilon = \beta$.

5. *Bizonyítsuk be, hogy* $\mathrm{Hom}_R(\oplus M_i, N) \cong \prod \mathrm{Hom}_R(M_i, N)$.

Megoldás: Legyen ι_i az M_i természetes beágyazása $\oplus M_i$-be. Ekkor a ι_i-vel való balszorzás homomorfizmus $\mathrm{Hom}_R(\oplus M_i, N)$-ből $\mathrm{Hom}_R(M_i, N)$-be minden i-re. A modulusok szorzatának definíciója szerint van olyan $\Phi : \mathrm{Hom}_R(\oplus M_i, N) \to \prod \mathrm{Hom}_R(M_i, N)$, hogy minden $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(\oplus M_i, N)$-re $\varphi\Phi = (\ldots, \iota_i\varphi, \ldots)$ (ld. az első ábrát). Ez a homomorfizmus szürjektív, ugyanis tetszőleges $(\ldots, \varphi_i, \ldots) \in \prod \mathrm{Hom}_R(M_i, N)$-re a koszorzat definíciója szerint (ld. a 2. ábrát) van olyan $\varepsilon : \oplus M_i \to N$, amelyre $\varphi_i = \iota_i\varepsilon$ minden i-re, azaz $(\ldots, \varphi_i, \ldots) = (\ldots, \iota_i\varepsilon, \ldots) = \varepsilon\Phi$. Másrészt Φ injektív is, mert ha valamely $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(\oplus M_i, N)$-re $\varphi\Phi = 0$, akkor $\iota_i\varphi = 0$ minden i-re, vagyis $\varphi = 0$ a $\oplus M_i$ mindegyik komponensén, és így az egész direkt összegen is. Tehát a megadott Φ leképezés izomorfizmus.

$$
\begin{tikzcd}
\prod \mathrm{Hom}_R(M_i, N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M_i, N) \\
\mathrm{Hom}_R(\oplus M_i, N) \arrow[u, dashed, "\Phi"] \arrow[ur, "\iota_i\cdot"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\oplus M_i \arrow[d, dashed, "\varepsilon"'] & M_i \arrow[l, "\iota_i"'] \arrow[dl, "\varphi_i"] \\
N &
\end{tikzcd}
$$

6. *Bizonyítsuk be hogy* $\mathrm{End}(R_R) \cong R$, *ha az endomorfizmusokat balról írjuk.*

Megoldás: Definiáljuk minden $r \in R$-re a $\varphi_r \in \mathrm{End}(R_R)$ endomorfizmust az r-rel való balszorzásként. Ez valóban jobbmodulus-homomorfizmus:

$$\varphi_r(x + y) = r(x + y) = rx + ry = \varphi_r x + \varphi_r y,$$

$$\varphi_r(xs) = r(xs) = (rx)s = (\varphi_r x) \cdot s.$$

Továbbá az $\varepsilon : R \to \mathrm{End}(R_R)$, $r \mapsto \varphi_r$ leképezés gyűrűhomomorfizmus, ugyanis

$$\varphi_{r+s}x = (r + s)x = rx + sx = \varphi_r x + \varphi_s x \text{ miatt } \varphi_{r+s} = \varphi_r + \varphi_s, \text{ és}$$

$$\varphi_{rs}x = (rs)x = r(sx) = \varphi_r(sx) = \varphi_r(\varphi_s x) \text{ miatt } \varphi_{rs} = \varphi_r\varphi_s.$$

ε injektív, mert $\varphi_r = \varphi_s$ esetén $r = \varphi_r 1 = \varphi_s 1 = s$, és szürjektív, mert ha $\varphi \in \mathrm{End}(R_R)$, és $\varphi 1 = r$, akkor $\varphi x = \varphi(1 \cdot x) = (\varphi 1) \cdot x = rx = \varphi_r x$ minden x-re, így $\varphi = \varphi_r$. Tehát ε gyűrűizomorfizmus.

7. *Bizonyítsuk be, hogy ha* $e \in R$ *idempotens, azaz* $e^2 = e$, *akkor* eR *projektív jobb* R*-modulus.*

Megoldás: Ha $e \in R$ idempotens, akkor $1-e$ is az: $(1-e)^2 = 1-e-e+e^2 = 1-e-e+e = 1-e$, és $e(1-e) = e-e^2 = e-e = 0$, $(1-e)e = e-e^2 = 0$, így $R_R = eR \oplus (1-e)R$. Mivel R_R szabad, és szabad modulus direkt összeadandója projektív, eR projektív modulus.

8*. *Bizonyítsuk be, hogy* $\prod\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ *nem projektív.*

9. *Bizonyítsuk be, hogy ha A véges dimenziós K-algebra, és $M \in \text{mod-}A$, akkor $D^2(M) \cong M$.*

Megoldás: Véges dimenziós A algebra fölötti végesen generált modulus is véges dimenziós, ugyanis homomorf képe A véges sok példánya direkt összegének. Tehát a feladatban $\dim_K M < \infty$. A véges dimenziós vektorterek duálisáról tudjuk, hogy az eredeti vektortérrel azonos dimenziós, így $\dim_K M = \dim_K D(M) = \dim_K D^2(M)$, tehát az izomorfizmushoz elég belátni, hogy van egy $\varepsilon : M \to D^2(M)$ injektív homomorfizmus.

Minden $m \in M$-re definiáljuk a $\Phi_m : D(M) \to K$ leképezést úgy, hogy $\alpha \in D(M) = \mathrm{Hom}_K(M, K)$-ra $\alpha\Phi_m = m\alpha \in K$. A Φ_m leképezés vektortér-homomorfizmus, mert

$$(\alpha + \beta)\Phi_m = m(\alpha + \beta) = m\alpha + m\beta = \alpha\Phi_m + \beta\Phi_m, \text{ és}$$

$$\lambda \in K\text{-ra } (\lambda\alpha)\Phi_m = m(\lambda\alpha) = \lambda(m\alpha) = \lambda(\alpha\Phi_m).$$

Legyen $\varepsilon : M \to D^2(M)$, $m \mapsto \Phi_m$. Ekkor ε jobbmodulus-homomorfizmus:

$$\alpha\Phi_{m+m'} = (m + m')\alpha = m\alpha + m'\alpha = \alpha\Phi_m + \alpha\Phi_{m'}$$

minden α-ra, tehát $\Phi_{m+m'} = \Phi_m + \Phi_{m'}$, és

$$\alpha\Phi_{mr} = (mr)\alpha = m(r\alpha) = (r\alpha)\Phi_m = \alpha(\Phi_m r),$$

minden α-ra, így $\Phi_{mr} = \Phi_m r$ (itt az $\alpha \in \mathrm{Hom}(M, K)''$ és $\Phi_m \in \mathrm{Hom}(D(M), K)$ elemek r-rel való szorzásánál használtuk a $D(M) = \mathrm{Hom}(M, K)$ bal R-modulus- és a $D^2(M) = \mathrm{Hom}(D(M), K)$ jobb R-modulusszerkezetét).

Végül ε injektív, ugyanis ha $\Phi_m = 0$, akkor $m\alpha = \alpha\Phi_m = 0$ minden α-ra. De ha $m \neq 0$, akkor az M_K vektortérnek van K_K-ba menő vektortér-homomorfizmusa, amelyik m-et nem nullába viszi. Tehát $\Phi_m = 0$ esetén $m = 0$.

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy egy P modulus akkor és csak akkor projektív, ha van olyan szabad F modulus, melyre $F \cong F \oplus P$*

Hf2. *Egy M_R modulusban $\{(x_i, f_i) \mid i \in I\}$ duális bázis, ha $x_i \in M$, $f_i \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$ minden i-re, és*
(1) minden $x \in M$-re $xf_i = 0$ teljesül véges sok index kivételével;
(2) minden $x \in M$-re $x = \sum_{i \in I} x_i(xf_i)$.
Bizonyítsuk be, hogy M akkor és csak akkor projektív, ha van duális bázisa.

A házi feladatok beadási határideje szeptember 22.