1. *Tegyük fel, hogy G osztható Abel-csoport.*

a) Bizonyítsuk be, hogy ha $g \in G$, akkor $o(g) = \infty$ esetén g belefoglalható G egy olyan direkt komponensébe, amely $\mathbb{Q}$-val izomorf, ha pedig $o(g) = p^n$ valamely p prímre és $n \geq 1$-re, akkor g beágyazható G egy $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-nel izomorf direkt komponensébe.

b) Bizonyítsuk be, hogy a G csoport $\mathbb{Q}$-knak és $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-eknek direkt összege.

Megoldás: a) Legyen $o(g) = \infty$, és $\alpha : \mathbb{Z} \to G$, amelyre $1\alpha = g$. Mivel $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$, a G injektivitása miatt α kiterjeszthető $\mathbb{Q}$-ra, azaz van olyan $\beta : \mathbb{Q} \to G$, hogy $\beta|_{\mathbb{Z}} = \alpha$. β injektív homomorfizmus, mert $\mathbb{Q}$ tetszőleges nem nulla elemének van egész többszöröse, tehát ha β egy elemet 0-ba képezne, akkor egy nemnulla egész számot is nullába vinne, pedig $n \in \mathbb{Z}$ képe β-nál $n\beta = n\alpha = n(1\alpha) = ng \neq 0$. Így $g \in H = \operatorname{Im}\beta \cong \mathbb{Q}$, és mivel $\mathbb{Q}$ osztható, tehát injektív, H nemcsak részmodulusa, hanem direkt összeadandója is G-nek.

Ha $o(g) = p^n$, akkor tekintsük $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-ben az $\frac{1}{p^n}$ elem által generált, $\mathbb{Z}_{p^n}$-nel izomorf részmodulust, és legyen $\alpha : \langle \frac{1}{p^n} \rangle \to G$, amelyre $(\frac{1}{p^n})\alpha = g$. Ekkor G injektivitása miatt α kiterjeszthető egy $\beta : \mathbb{Z}_{p^\infty} \to G$ homomorfizmussá. β injektív homomorfizmus, mert $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ minden nem nulla elemének többszöröse az $\frac{1}{p}$ ($\frac{m}{p}$ alakú többszörös nyilván van, ahol $(p, m) = 1$, és ha $x, y \in \mathbb{Z}$ olyanok, hogy $xp + ym = 1$, akkor $\frac{1}{p} = x + y\frac{m}{p} = y\frac{m}{p}$ a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-ben), így ha β nem lenne injektív, akkor $\frac{1}{p}\beta = 0$ lenne, de akkor $0 = p^{n-1}((\frac{1}{p^n})\beta) = p^{n-1}((\frac{1}{p^n})\alpha) = p^{n-1}g$, ami ellentmond annak, hogy $o(g) = p^n$.

b) Legyen $\{\, H_i \mid i \in I \,\}$ a G csoport összes $\mathbb{Q}$-val vagy $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-nel izomorf részcsoportja, és $\mathcal{H} = \{\, J \subseteq I \mid \sum_{i \in J} H_i = \oplus_{i \in J} H_i \,\}$. A $\mathcal{H}$ halmazra és az elemein a tartalmazás által megadott részbenrendezésre alkalmazható a Zorn-lemma, ugyanis ha indexhalmazoknak egy felszálló $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots$ sorozatának mindegyik eleméhez tartozó H_i-k függetlenek, akkor a $J = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} J_i$ indexhalmazhoz tartozók is azok. Így van $\mathcal{H}$-nak egy maximális eleme, mondjuk J_0. Legyen $U = \oplus_{i \in J_0} H_i$. Mivel U osztható csoportok összege, maga is osztható, és így injektív is. Emiatt U direkt összeadandója G-nek. Ha $U < G$, akkor az a) rész miatt a komplementerében is van $\mathbb{Q}$-val vagy valamely $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-nel izomorf összeadandó, ami ellentmondana J maximalitásának.

2. *Adjuk meg az A algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha $A = K\Gamma/I$, ahol Γ:* $\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, shift left, "\alpha"] & \overset{2}{\bullet} \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[loop right, "\gamma"] \end{tikzcd}$ *és*

a) $I = (\alpha\gamma, \gamma^2, \gamma\beta, \alpha\beta\alpha, \beta\alpha\beta)$;

b) $I = (\alpha\gamma^2, \gamma^2 - \beta\alpha, \alpha\beta)$.

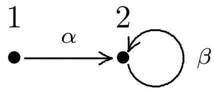
Megoldás: a) $A_A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \\ 2 & & \end{smallmatrix}$

b) $A_A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & & \\ 1 & & 2 & \\ & 2 & & 1 \\ & & 2 & \end{smallmatrix}$.

3. *Lehet-e az alábbi egy $K\Gamma/I$ algebra reguláris jobbmodulusának Loewy-diagramja? Ha igen, adjuk meg a Γ gráfot és az I ideálnak egy generátorrendszerét.*

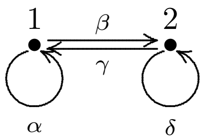
a) $\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}$ *b)* $\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix}$ *c)* $\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus 3$

Megoldás: a) Nincs ilyen algebra. Ugyanis ennek az algebrának a gráfja csak



lehetne, de a második komponensből leolvasható, hogy $\beta^2 = 0$, míg az első komponensből azt látjuk, hogy $\alpha\beta^2 \neq 0$, ami ellentmondás.

b) Az algebra gráfja

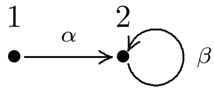


és $I = (\alpha^2, \beta\gamma, \alpha\beta - \beta\delta, \gamma\alpha, \gamma\beta, \delta^2, \delta\gamma)$.

c) Az algebra gráfja $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$, és $I = (\alpha\beta)$.

4. *Legyen $A = K\Gamma/I$ az az algebra, amelynek reguláris jobbmodulusa $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\2\\2\end{smallmatrix}$. Határozzuk meg az $\begin{smallmatrix}&&1\\1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$ modulus összes részmodulusát és az ezekkel vett faktorainak Loewy-diagramját.*

Megoldás: Az algebra gráfja Γ :



és $A = K\Gamma/(\alpha\beta^2, \beta^3)$. Nevezzük el az $M = \begin{smallmatrix}&&1\\1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$ modulus báziselemeit b_1, c_1, b_2, c_2-nek, ahol $Me_1 = \langle b_1, c_1\rangle$, $Me_2 = \langle b_2, c_2\rangle$ úgy, hogy a modulus

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & c_1 \arrow[d, dash, "\alpha"] \\
b_1 \arrow[dr, dash, "\alpha"'] & & c_2 \arrow[dl, dash, "\beta"] \\
 & b_2 &
\end{tikzcd}$$

Legyen $U \leq M$. Először tegyük fel, hogy $Ue_1 \neq 0$. Ha U-ban van $u = \lambda b_1 + \mu c_1$ alakú elem, ahol $\mu \neq 0$, akkor $u\alpha = \lambda b_2 + \mu c_2$, és $u\alpha\beta = \mu b_2$ miatt $b_2, c_2 \in U$, tehát vagy $U = M$, vagy U háromdimenziós, és bázisa $\{\, \lambda b_1 + \mu c_1, b_2, c_2 \,\}$. Legyen ez U_μ. Ezeknek a modulusoknak a Loewy-diagramja $\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}$. Ha $Ue_1 \neq 0$, de csak λb_1 alakú elemeket tartalmaz, akkor $b_1 \in U$, és ebből $b_2 \in U$ is következik. Így Ue_2 vagy Me_2-vel egyezik meg, vagy egydimenziós, tehát a részmodulus vagy $\langle b_1, b_2, c_1\rangle = \begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$, vagy $\langle b_1, b_2\rangle = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$. Ha $Ue_1 = 0$, és $U = Ue_2$-nek van $u = \lambda b_2 + \mu c_2$ alakú eleme $\mu \neq 0$-val, akkor $u\beta = \mu b_2 \in U$, így $b_2, c_2 \in U$, és $U = \langle c_2, b_2\rangle = \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}$. Ha ilyen elem sincs Ue_2-ben, de $U \neq 0$, akkor $U = \langle b_2\rangle$, és a Loewy-diagramja 2. Így a végtelen sok (de egymással izomorf) U_μ részmoduluson kívül, de a 0-t is beleszámítva 6 részmodulus van. A faktormodulusok Loewy-diagramjukkal felírva: 0, 1, $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$, $1 \oplus 1$, $1 \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$, és maga M.

Egy M modulus maximumfeltételes (ill. minimumfeltételes), ha részmodulusok minden részhalmazában van maximális (ill. minimális).

Egy X részmodulus kicsi M-ben ($X << M$), ha minden $Y \leq M$-re $X + Y = M$-ből következik, hogy $Y = M$.

5. *Bizonyítsuk be, hogy ha $Y \leq X << M$ és $Z \leq M$, akkor*

a) $Y << M$;

b) $\overline{X} << M/Z$, *ahol* $\overline{X} = (X+Z)/Z$ *az* X *képe a* Z*-vel való faktorizálásnál.*

Megoldás: a) Ha $Y + U = M$, akkor $X + U \geq Y + U = M$ miatt $X + U = M$, és így $U = M$.

b) Ha $\bar{X} + \bar{U} = M/Z$, akkor $X + U + Z = M$, de $X << M$, ezért $U + Z = M$, azaz $\bar{U} = \bar{M}$.

6. *Lássuk be, hogy egy R gyűrűben egy a elem akkor és csak akkor van benne egy nilpotens jobbideálban, ha egy nilpotens balideálban is benne van.*

Megoldás: Ha $a \in R$ benne van egy nilpotens jobbideálban, akkor aR is nilpotens, azaz van olyan n, amelyre $(aR)^n = 0$. De akkor $(RaR)^n = R(aR)^n = 0$, és RaR ideál, tehát a egy nilpotens ideálban is (következésképpen egy nilpotens balideálban is) benne van.

7. *Bizonyítsuk be, hogy egy modulus akkor és csak akkor maximum- és minimumfeltételes, ha van véges kompozíciólánca.*

Megoldás: Tegyük fel, hogy M maximum- és minimumfeltételes. Ekkor a valódi részmodulusai között is van maximális, legyen egy ilyen M_1. Ha $M_1 \neq 0$, akkor az M_1 által tartalmazott, de M_1-gyel nem azonos modulusok között is van maximális, és így tovább. Ezzel kapunk egy $M > M_1 > M_2 > \cdots$ láncot, amelynek a minimumfeltétel miatt kell, hogy legyen minimális eleme, tehát a lánc véges, és az utolsó tagja csak 0 lehet, így egy véges kompozícióláncot kaptunk.

Most tegyük fel, hogy M-nek van véges kompozíciólánca. A Jordan–Hölder-tétel miatt M minden részmodulusának is van véges kompozíciólánca, és ha $U < V \leq M$, akkor U kompozícióhossza kisebb V kompozícióhosszánál. Ebből következik, hogy nincs végtelen felszálló vagy leszálló $M_1 < M_2 < \cdots$, illetve $M_1 > M_2 > \cdots$ moduluslánc M-ben, így M maximum- és minimumfeltételes.

8. *Tegyük fel, hogy egy R gyűrűre R_R maximum- és minimumfeltételes. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek R tetszőleges J jobbideáljára.*

(i) J *nilpotens;*

(ii) J *annullál minden egyszerű jobb R-modulust;*

(iii) minden véges kompozícióláncú jobb R-modulust annullál J-nek egy alkalmas hatványa.

Megoldás: (i)$\Rightarrow$(ii): Ha $S \neq 0$ egyszerű modulus, akkor $SJ \leq S$ miatt $SJ = 0$ vagy $SJ = S$. Az utóbbi esetben $SJ^n = S \neq 0$, és ez ellentmond annak, hogy J valamelyik hatványa 0. Tehát $SJ = 0$.

(ii)$\Rightarrow$(iii): A kompozíciólánc hosszára vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Ha M_1 maximális M-ben, akkor M/M_1 egyszerű, tehát $MJ \leq M_1$. Az indukciós feltevés miatt $M_1 J^n = 0$ valamely n-re, így $MJ^{n+1} = 0$.

(iii)$\Rightarrow$(i): A_A-ra alkalmazva a feltevést $J^n = 1 \cdot J^n \leq A_A J^n = 0$ alkalmas n-re.

9. *Definiáljuk a $J(R)$ Jacobson-radikált úgy, mint az R maximális jobbideáljainak (azaz R_R maximális részmodulusainak) metszetét. Bizonyítsuk be, hogy ha R_R minimum- és maximumfeltételes, akkor*

a) $J(R)$ *a legkisebb (azaz minden más ilyenben benne levő) olyan jobbideál, hogy az R_R-nek ezzel vett faktormodulusa féligegyszerű.*

b) $J(R)$ a legnagyobb (azaz minden más ilyet tartalmazó) nilpotens jobbideál.
c) $J(R)$ az egyetlen olyan jobbideál, amelyre $R_R/J(R)$ féligegyszerű és $J(R)$ nilpotens.

Megoldás: a) $J(R)$ az R összes maximális jobb részmodulusának a metszete, de felírható úgy is, mint véges sok maximális részmodulus metszete, ugyanis a véges metszetek között kell lennie minimálisnak a minimumfeltétel miatt, és ha J ez a minimális véges metszet, akkor bármely maximális M részmodulusra $M \cap J$ nem lehet valódi része J-nek, így $M \cap J = J$, azaz $J \leq M$, tehát $J(R) \leq J \leq J(R)$. Legyen $J(R) = \bigcap_{i=1}^{n} M_i$. Ekkor van egy $\varphi : R_R \to \oplus_{i=1}^{n} R/M_i$ homomorfizmus, amelyre $r\varphi = (r + M_1, \ldots, r + M_n)$, és ennek a magja éppen $J(R)$. Tehát $M/J(R)$ izomorf a $\oplus(R_R/M_i)$ féligegyszerű modulus egy részmodulusával, és így maga is féligegyszerű.
Másrészt ha egy $U \leq R_R$ részmodulusra R/U féligegyszerű, és π_i az R/U i-edik egyszerű komponensére, S_i-re való vetítés, akkor $\cap \operatorname{Ker} \pi_i = 0$, azaz a $\varphi_i : R_R \longrightarrow R_R/U \xrightarrow{\pi_i} S_i$ homomorfizmusok magjának metszete U, és $\operatorname{Ker} \varphi_i$ maximális részmodulus, így $U \geq J(R)$.

b) Mivel minden egyszerű jobb R-modulus előáll R/M alakban, ahol M maximális részmodulus, és $J(R) \leq M$ miatt $(R/M)J(R) = 0$, az előző feladat szerint $J(R)$ nilpotens. Másrészt ha egy $U \leq R_R$ jobbideál nilpotens, akkor szintén az előző feladat szerint $(R/M)U = 0$ minden M maximális részmodulusra, azaz $RU \leq M$, és így $U \leq RU \leq J(R)$.

c) Ha egy $U \leq R$ részmodulusra R/U féligegyszerű, akkor az $a)$ rész szerint $J(R) \leq U$, ha emellett U nilpotens, akkor a $b)$ miatt $U \leq J(R)$, tehát $U = J(R)$.

10. *Bizonyítsuk be minimum- és maximumfeltételes R_R esetén, hogy $J(R)$ ideál, és ugyanezt az ideált kapjuk, ha $J(R)$-et R maximális balideáljainak metszeteként definiáljuk.*

Megoldás: $J(R)$ nilpotens, tehát az $RJ(R)$ ideál is nilpotens (ld. a 6. feladat bizonyítását), és mivel az is jobbideál, a 9.b) szerint $RJ(R) \leq J(R)$, azaz $J(R)$ ideál is.
Ahhoz, hogy balideálokkal definiálva ugyanezt a Jacobson-radikált kapjuk, felhasználjuk, hogy $R/J(R)$ féligegyszerű gyűrű, így balmodulusként is féligegyszerű, tehát (véges sok) egyszerű balmodulus direkt összege, és emiatt $R/J(R)$-ben a triviális modulus maximális balideálok (a direkt összeadandókból kihagyunk egyet) metszete, és emiatt $J(R)$ tartalmazza az összes maximális balideál metszetét. Fordítva, ha M maximális balideál, akkor $J(R)$ nilpotenciája miatt $J(R)({}_R R/M) = 0$, tehát $J(R) = J(R)R \leq M$, vagyis $J(R)$ benne van a maximális balideálok metszetében.

11. *(Fitting-lemma) Bizonyítsuk be, hogy ha M maximum- és minimumfeltételes modulus, és $\varphi \in \operatorname{End}(M)$, akkor van olyan n, amelyre $M = \operatorname{Ker} \varphi^n \oplus \operatorname{Im} \varphi^n$.*

Megoldás: Mivel $\operatorname{Ker} \varphi \leq \operatorname{Ker} \varphi^2 \leq \ldots$ és $\operatorname{Im} \varphi \geq \operatorname{Im} \varphi^2 \geq \ldots$, a minimum- és maximumfeltétel miatt van olyan n, hogy $\operatorname{Ker} \varphi^n = \operatorname{Ker} \varphi^{n+1} = \ldots$ és $\operatorname{Im} \varphi^n = \operatorname{Im} \varphi^{n+1} = \ldots$. Belátjuk, hogy ekkor $R = \operatorname{Ker} \varphi^n \oplus \operatorname{Im} \varphi^n$. Ha $u \in \operatorname{Ker} \varphi^n \cap \operatorname{Im} \varphi^n$, akkor $u = v\varphi^n$ valamely v-re, és $u\varphi^n = 0$, így $v \in \operatorname{Ker} \varphi^{2n} = \operatorname{Ker} \varphi^n$, tehát $u = v\varphi^n = 0$. Másrészt tetszőleges $u \in M$-re $u\varphi^n \in \operatorname{Im} \varphi^n = \operatorname{Im} \varphi^{2n}$, tehát van olyan v, hogy $u\varphi^n = v\varphi^{2n}$, így $u - v\varphi^n \in \operatorname{Ker} \varphi^n$. Ezért $u = (u - v\varphi^n) + v\varphi^n \in \operatorname{Ker} \varphi^n + \operatorname{Im} \varphi^n$.

Hf1. *Egy R gyűrűt öninjektívnek hívunk, ha R_R injektív. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}$ minden valódi faktorgyűrűje injektív, de $\mathbb{Z}$ nem.*

Hf2. *Írjuk fel az $A = K\Gamma/I$ algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha*

$$\Gamma : 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\delta}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} 3, \qquad I = (\alpha\beta, \beta\alpha - \gamma\delta, \delta\beta, \delta\gamma)$$

Hf3. *Legyen M maximumfeltételes modulus. Bizonyítsuk be, hogy* $\operatorname{rad} M$ *a legnagyobb olyan részmodulus, amely kicsi M-ben.*