1. *Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_2S_3 \cong \mathbb{Z}_2D_3$ csoportalgebra direkt felbonthatatlan projektív modulusait és egyszerű modulusait.*

Megoldás: Legyen f az egyik harmadrendű forgatás, t pedig az egyik tükrözés D_3-ban, és legyen $A = \mathbb{Z}_2D_3$. Egy csoportalgebrában tetszőleges H részcsoport elemeinek u összegére $u^2 = |H|\,u$, így $\operatorname{char} K \mid |H|$ esetén u nilpotens, különben pedig $(1/|H|)u$ idempotens. Ebben az esetben $1 + f + f^2$ idempotens, sőt centrális idempotens is, mivel teljes konjugáltosztályok összege. Tehát a komplementerével, $f + f^2$-tel együtt A-nak gyűrűk direkt összegére való felbontását adja: $A = (1 + f + f^2)A \oplus (f + f^2)A$. Az első komponens 2-dimenziós, és van benne egy 1-dimenziós nilpotens ideál, amelyet D_3 elemeinek az összege generál, tehát a radikállal vett faktora egyszerű, és így nem bontható tovább modulusok direkt összegére. A második komponens viszont 4-dimenziós, ebben próbálunk még idempotenseket keresni.

Legyen $z = f + f^2$. Ekkor zA-nak mint vektortérnek bázisa $\{z, zt, zf, zft\}$ ($zf^2 = z + zf$, $zf^2t = zt + zft$).

A következő a szorzástábla a báziselemeken:

	z	zt	zf	zft
z	z	zt	zf	zft
zt	zt	z	$zt + zft$	$z + zf$
zf	zf	zft	$z + zf$	$zt + zft$
zft	zft	zf	zt	z

Ebből egyszerűen kiszámítható, hogy egy $az + bt + czf + dzft$ elem négyzete $(a + b + c + d + bd)z + (bc)zt + (c)zf + (cd)zft$ (használva azt is, hogy $x^2 = x$ igaz $\mathbb{Z}_2$-ben). Tehát zA egy eleme akkor idempotens, ha $a = a + b + c + d + bd$, $b = bc$ és $c = cd$. Ha $c = 0$, akkor ebből $b = d = 0$, és akkor nem kapunk új idempotenst. Marad az, hogy $c = 1$ és $b + d + 1 + bd = 0$, azaz $(b + 1)(d + 1) = 0$, vagyis b és d egyike 1. Például $z(f + t)$ idempotens, és ennek kiegészítője $z + zf + zt$. Mindkettő kétdimenziós alteret generál, és a három nem 0 elemüket f ciklikusan permutálja, t pedig egyet fixen hagy, kettőt megcserél. Ebből látszik, hogy irreducibilis és egymással izomorf a kapott két modulus (az izomorfiát az is mutatja, hogy $t \cdot z(f + t)A = z(f^2t + 1)A = z(1 + f + t)A$). Tehát $\mathbb{Z}_2D_3$-nak két nem izomorf 2-dimenziós direkt felbonthatatlan projektív modulusa van: $(1 + f + f^2)A$ és $(f + f^2)(f + t)A = (1 + f^2 + ft + f^2t)A$ ezeknek egy-egy példánya a csoportalgebrában. Az elsőnek van egy nemtriviális radikálja, a második viszont egyszerű modulus.

2. *Bizonyítsuk be, hogy* $\operatorname{Hom}(M_A, A_A)$ *bal A-modulus (másképpen jobb A^{opp}-modulus), ha a homomorfizmusokat balról írjuk, és ha M felbonthatatlan projektív* mod-A*-ban, akkor* $\operatorname{Hom}(M_A, A_A)$ *felbonthatatlan projektív* A-mod*-ban.*

Megoldás: Definiáljuk az A elemeivel való balszorzást $\operatorname{Hom}(M_A, A_A)$-n úgy, hogy $(a\varphi)m = a(\varphi m)$. Egyszerű számolással ellenőrizhetjük, hogy $a\varphi$ valóban modulushomomorfizmus minden a-ra és $\varphi \in \operatorname{Hom}(M_A, A_A)$-re, továbbá, hogy így egy bal A-modulust kapunk. Jelöljük M^*-gal ezt a modulust. Ha $\alpha : M \to N$ homomorfizmus, akkor $\varphi \in N^*$-ra $\alpha^* : \varphi \mapsto \varphi\alpha$ (mivel most a homomorfizmusokat balról írjuk, ez először α, aztán β alkalmazását jelenti!) egy homomorfizmust definiál N^*-ból M^*-ba, és ezzel $\operatorname{Hom}(-, A_A)$

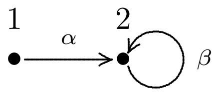
funktor mod-A-ból A-mod-ba. Ez a funktor direkt összeget direkt összegbe képez, és $(A_A)^* = {}_AA$ (ld. az 1/6.-os feladatot), ezért A_A direkt felbonthatatlan projektívekre bontásából ${}_AA$ direkt felbontását kapjuk. Tehát a felbonthatatlan projektívek képei projektív modulusok. Ráadásul ezek is felbonthatatlanok, mert azt, hogy hány komponensre bontható A_A, illetve ${}_AA$, csak az A algebra idempotensei határozzák meg, vagyis ${}_AA$-nak sem lehet több felbonthatatlan komponense, mint A_A-nak.

3. *Tegyük fel, hogy A gráfalgebra $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ nyilakkal, és hogy az $M \in \mathrm{mod}\text{-}A$ modulusnak van olyan $\mathcal{B} = \{\, b_1, \dots, b_\ell \,\}$ bázisa, amelyre a $\mathcal{B} \cup \{\, 0 \,\}$ halmazt minden nyíllal való jobbszorzás önmagába képezi. Jelölje továbbá minden α nyílra $b_i\alpha^{-1}$ az $\{\, x \in \mathcal{B} \mid x\alpha = b_i \,\}$ halmazt. Bizonyítsuk be, hogy $D(M)$-nek bázisa a $\mathcal{B}' = \{\, b'_1, \dots, b'_k \,\}$ halmaz, ahol $b'_i : b_j \mapsto \delta_{ij}$, és $\alpha b'_i = (\sum b_i\alpha^{-1})'$.*

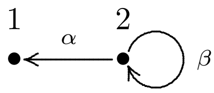
Megoldás: Tetszőleges $\varphi \in D(M) = \mathrm{Hom}_K(M, K)$-ra $\varphi = \sum (b_i\varphi)b'_i$, így a b'_i elemek generátorrendszert alkotnak $D(M)$-ben, és nyilván függetlenek. Az α nyílra $b_j(\alpha b'_i) = (b_j\alpha)b'_i$, ami 1, ha $b_j\alpha = b_i$, és 0 különben. Tehát $\alpha b'_i = \sum \{\, b'_j \mid b_j\alpha = b_i \,\} = (\sum b_i\alpha^{-1})'$.

4. *Legyen $A_A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}$. Határozzuk meg ${}_AA$ Loewy-diagramját, és duálisképzéssel az összes felbonthatatlan injektív jobb A-modulust.*

Megoldás: Az algebra gráfja Γ:



és $A \cong K\Gamma/I$, ahol $I = (\alpha\beta^2, \beta^3)$. ${}_AA$ Loewy-diagramja megegyezik $A^{opp}_{A^{opp}}$ Loewy-diagramjával. A^{opp} gráfja Γ^{opp}:



és $I^{opp} = (\beta^2\alpha, \beta^3)$. Ebből azt kapjuk, hogy

$${}_AA = A^{opp}_{A^{opp}} = 1 \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & & \\ 1 & & 2 & \\ & & 1 & 2 \end{smallmatrix}.$$

Erre a modulusra teljesülnek a 3. feladat feltételei, és minden báziselemnek minden nyíllal csak egy ősképe van, így a duálist egyszerűen a diagram megfordításával kapjuk:

$${}_AA = 1 \oplus \begin{smallmatrix} & & 1 & 2 \\ 1 & & 2 & \\ & 2 & & \end{smallmatrix}.$$

5. *Adjuk meg a 4. feladat algebrája fölött az $M = \begin{smallmatrix} & 1 \\ 1 & 2 \\ & 2 \end{smallmatrix}$ és $\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ & 2 \end{smallmatrix}$ modulusok K-duálisának Loewy-diagramját.*

Megoldás: Mindkét modulusban teljesülnek a 3. feladat feltételei. Az elsőben minden báziselemnek mindegyik nyílra nézve legföljebb egy ősképe van, tehát a Loewy-diagramja az eredeti Loewy-diagram megfordítása: $\begin{smallmatrix} & 2 \\ 1 & 2 \\ & 1 \end{smallmatrix}$. Ha a második báziselemei b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, ahol

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
b_1 \arrow[d, dash, "\alpha"'] & & b_2 \arrow[d, dash, "\beta"] \\
b_3 \arrow[dr, dash, "\beta"'] & & b_4 \arrow[dl, dash, "\beta"] \\
& b_5 &
\end{tikzcd}$$

akkor a duálisának bázisa $\{ b_1', b_2', b_3', b_4', b_5' \}$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
& b_5' \arrow[d, dash, "\beta'"'] & \\
b_3' \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[d, dash, "\alpha'"'] & & b_4' \arrow[d, dash, "\beta'"] \\
b_1' & & b_2'
\end{tikzcd}$$

azaz $\beta' : b_5' \mapsto b_3' + b_4'$, $\beta : b_4' \mapsto b_2'$ és $\alpha' : b_3' \mapsto b_1'$. Legyen $b_3'' = b_3' + b_4'$, ekkor a $\{ b_1', b_2', b_3'', b_4', b_5' \}$ bázisban a modulus Loewy-diagramja

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
& b_5' \arrow[d, dash, "\beta'"'] & & \\
& b_3'' \arrow[dl, dash, "\alpha'"'] \arrow[dr, dash, "\beta'"] & & b_4' \arrow[dl, dash, "\beta'"] \\
b_1' & & b_2' &
\end{tikzcd}
\quad \text{azaz} \quad
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
& 2 \arrow[d, dash] & & \\
& 2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & 2 \arrow[dl, dash] \\
1 & & 2 &
\end{tikzcd}$$

6. *Írjuk le $\mathbb{Z}_2 D_3$ felbonthatatlan injektív modulusait.*

Megoldás: Minden véges csoport csoportalgebrája öninjektív, sőt szimmetrikus, ezért az 1. feladat megoldása leírja a felbonthatatlan injektív modulusokat is: $Q_1 = P_1 \cong (1+f+f^2)A$ és $Q_2 = P_2 \cong (f+f^2)(f+t)A$, ahol $A = \mathbb{Z}_2 D_3$.

7. *Legyen $A_A = \begin{smallmatrix}1\\3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$. Adjuk meg ind-A-ban az összes projektívbe menő és az összes injektívből induló irreducibilis morfizmust.*

Megoldás: A 4. feladat megoldásához hasonlóan kiszámítható, hogy

$${}_A A = \begin{smallmatrix}&1\\2&3\\&1\end{smallmatrix} \oplus 2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}, \text{ és}$$

$$D({}_A A) = \begin{smallmatrix}&1\\2&3\\&1\end{smallmatrix} \oplus 2 \oplus \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}.$$

Az projektívekbe menő irreducibilis morfizmusok a radikál direkt összeadandóinak beágyazásai, az injektívekből menők, az injektív talppal vett faktora direkt összeadandóira való vetítések. Így a következőket találjuk:

$$P_1 = \begin{smallmatrix}1\\3\\1\end{smallmatrix}, \quad \operatorname{rad} P_1 = \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}, \quad \text{irred. morfizmus: } \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\3\\1\end{smallmatrix},$$

$$P_2 = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, \quad \operatorname{rad} P_2 = 1, \quad \text{irred. morfizmus: } 1 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix},$$

$$P_3 = \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}, \quad \operatorname{rad} P_3 = 1, \quad \text{irred. morfizmus: } 1 \to \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{smallmatrix}&1\\2&3\\&1\end{smallmatrix}, \quad Q_1/\operatorname{soc} Q_1 = 2 \oplus \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}, \quad \text{irred. morfizmusok: } \begin{smallmatrix}&1\\2&3\\&1\end{smallmatrix} \to 2, \quad \begin{smallmatrix}&1\\2&3\\&1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix},$$

$$Q_2 = 2, \quad Q_2/\operatorname{soc} Q_2 = 0, \quad \text{irred. morfizmus nincs } 2\text{-ből},$$

$$Q_3 = \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}, \quad Q_3/\operatorname{soc} Q_3 = 1, \quad \text{irred. morfizmus: } \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix} \to 1.$$

Hf1. *Határozzuk meg az $A = \mathbb{Z}_2 C_4$ csoportalgebra Jacobson-radikálját. Hány különbző egyszerű modulus van* mod-A*-ban, és hány direkt összeadandója van A_A-nak?*

Hf2. *Adjuk meg az $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$ algebra felbonthatatlan injektív modulusainak Loewy-diagramját.*