1. *Tegyük fel, hogy $R = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$, ahol minden P_i direkt felbonthatatlan modulus. Nevezzük P_i-t és P_j-t szomszédosnak, ha $\operatorname{Hom}(P_i, P_j) \neq 0$ vagy $\operatorname{Hom}(P_j, P_i) \neq 0$, és legyenek $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_t$ az így kapott gráf összefüggő komponensei. Bizonyítsuk be, hogy $\oplus \{ P_i \mid P_i \in \mathcal{K}_j \}$ direkt felbonthatatlan ideálja R-nek minden j-re, és R ezeknek a direkt felbonthatatlan gyűrűknek a direkt összege.*

Megoldás: Legyen $R_j = \bigoplus_{P_i \in \mathcal{K}_j} P_i$. Tegyük fel, hogy $P \in \mathcal{K}_j$ és $r \in R$. Ekkor $rP = 1 \cdot rP = (e_1 + \ldots + e_n)rP = \oplus e_i rP$, ahol $P_i = e_i R$, tehát $e_i rP \leq P_i$ minden i-re. Ha $e_i rP \neq 0$, akkor $\operatorname{Hom}(P, P_i) \neq 0$, tehát $P_i \in \mathcal{K}_j$. Így $rP \leq R_j$ minden $P \in \mathcal{K}_j$-re és $r \in R$-re, vagyis $R_j \lhd R$.

Ha $R_j = S \oplus T$ nem triviális gyűrű-direktösszeg, akkor a Krull–Schmidt-tétel szerint S és T is $\mathcal{K}_j$-beli P_i-kel izomorf modulusok direkt összege, így S valamelyik komponense és T valamelyik komponense között van homomorfizmus, és ez természetes módon kiterjed S és T közötti homomorfizmussá. De $S^2 = S$, és $S \leq \operatorname{Ann}(T)$ miatt $\operatorname{Hom}(S, T) = 0$, és ugyanígy $\operatorname{Hom}(T, S) = 0$, ami ellentmond az előbbieknek.

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0$ Auslander–Reiten-sorozat, akkor $0 < Z_1 < Z$ részmodulusra a $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Z_1\beta^{-1} \xrightarrow{\beta} Z_1 \longrightarrow 0$ sorozat felhasadó.*

Megoldás: Legyen $Y_1 = Z_1\beta^{-1}$, és β' a β megszorítása $Z_1\beta^{-1}$-re. Ekkor $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta \leq Y_1$ miatt a $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y_1 \xrightarrow{\beta'} Z_1 \longrightarrow 0$ sorozat létezik, és az eredeti sorozat egzaktsága miatt ez is egzakt. Térjünk vissza most az első sorozathoz. Legyen $\iota : Z_1 \to Z$ a természetes beágyazás. ι nem epimorfizmus, így nem is felhasadó epimorfizmus, tehát az ARS definíciója szerint létezik olyan $\gamma : Z_1 \to Y$, amelyre $\gamma\beta = \iota$. Mivel $\operatorname{Im}\gamma\beta = \operatorname{Im}\iota = Z_1$, $\operatorname{Im}\gamma \leq Z_1\beta^{-1}$, tehát $\gamma : Z_1 \to Y_1$ és $\gamma\beta' = \gamma(\beta|_{Y_1}) = id_{Z_1}$. Így a második sorozatban használva a γ morfizmust:

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y_1 \underset{\gamma}{\overset{\beta'}{\rightleftarrows}} Z_1 \longrightarrow 0,$$

láthatjuk, hogy a második sorozat felhasadó.

3. *Legyen $A_A = \begin{smallmatrix}1\\3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$. Adjuk meg az egyszerű modulusok Auslander–Reiten-eltoltjait.*

Megoldás: Egy M modulus AR-eltoltját a következő lépésekkel lehet kiszámítani:

$$\xi : \ P' \xrightarrow{\alpha} P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

az M projektív feloldásának első két lépése. Erre alkalmazzuk a $\operatorname{Hom}(-, A_A)$ funktort:

$$\xi^* : \ 0 \longrightarrow M^* \longrightarrow P^* \xrightarrow{\alpha^*} (P')^* \longrightarrow Tr(M) \longrightarrow 0,$$

kiegészítve jobb oldalon az α^* komagjával, hogy egzakt sorozatot kapjunk. Ezután alkalmazzuk az utóbbi sorozatra a K-dualitást:

$$D(\xi^*) : \ 0 \longrightarrow \tau(M) \longrightarrow Q' \xrightarrow{D(\alpha^*)} Q \longrightarrow D(M^*) \longrightarrow 0.$$

Az utóbbiban $\tau(M) = D(Tr(M))$, és $Q = D(P^*)$ a P-nek megfelelő injektív, $Q' = D((P')^*)$ a P'-nek megfelelő injektív modulus.

Ha $\mathrm{Hom}(P', P)$ egydimenziós, akkor $\mathrm{Hom}(Q', Q)$ is az, így abban az esetben a második sorozatot ki lehet hagyni, és $\tau(M)$-et mint $D(\alpha^*)$ magját kiszámíthatjuk. Ellenkező esetben a második sorozat α^*-át meg kell határoznunk, abból $Tr(M)$-et, és aztán $\tau(M) = D(Tr(M))$-et egyszerű duálisképzéssel (ld. a 3. feladatsor 5. feladatát).

Az ebben a feladatban kérdezett eltoltakhoz elég az első módszer. A 3. feladatsor 4. feladatának megoldása szerint

$$ {}_AA = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ & 1 & \end{smallmatrix} \oplus 2 \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}, \text{ és} $$

$$ D({}_AA) = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ & 1 & \end{smallmatrix} \oplus 2 \oplus \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}. $$

Ennek alapján az eltoltak kiszámítása:

$\xi: \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \to 1 \to 0$ $\qquad D(\xi^*): 0 \to 3 \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ & 1 & \end{smallmatrix} \to \cdots$ $\qquad \tau(1) = 3$

$\xi: \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to 2 \to 0$ $\qquad D(\xi^*): 0 \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ & 1 & \end{smallmatrix} \to 2 \to \cdots$ $\qquad \tau(2) = \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$

$\xi: \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \to 3 \to 0$ $\qquad D(\xi^*): 0 \to \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ & 1 & \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix} \to \cdots$ $\qquad \tau(3) = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$

4. *Legyen $A_A = P_1 \oplus P_2$, ahol $P_1 = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}$ és $P_2 = \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}$, továbbá $P_1^* = \mathrm{Hom}(P_1, A_A)$ és $P_2^* = \mathrm{Hom}(P_2, A_A)$. Rajzoljuk föl a P_1^* és P_2^* bal A-modulusok Loewy-diagramját. Ha az $\alpha : P_2 \to P_1$ homomorfizmus képe egydimenziós, akkor mi az ennek megfelelő $\alpha^* : P_1^* \to P_2^*$ homomorfizmus a Loewy-diagramokon megadva? Határozzuk meg ennek segítségével az $\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$ modulus AR-eltoltját.*

Megoldás: Tudjuk, hogy $\mathrm{End}(A_A) \cong A$, ahol minden $r \in A$ elemnek az r-rel való balszorzás felel meg. Ebben $\mathrm{Hom}(P_i, A_A)$ az Ae_i részmodulus (az e_i-vel való balszorzás A_A-ban az e_iA komponensre való vetítés), és $\mathrm{Hom}(P_i, P_j)$ az e_jAe_i altér. Egy $\varphi \in \mathrm{Hom}(P_i, P_j)$ morfizmus (az $\mathrm{End}(A) \cong A$ megfeleltetésnél $r \in e_jAe_i$ elem) képe a $\mathrm{Hom}_A(-, A_A)$ funktornál $r^* : \mathrm{Hom}(P_j, A_A) \to \mathrm{Hom}(P_i, A_A)$ az r elemmel való jobbszorzás, azaz $e_j \mapsto e_jr = r$. Tehát ha $\varphi : e_i \to r$, akkor $\varphi^* : e_j \to r$. A Loewy-diagramokat könnyebb ${}_AA$ helyett az $A^{opp}_{A^{opp}}$-ra fölírni, ekkor $e_i \mapsto r$ képe $e_j \mapsto r'$, ahol r' az r-nek megfelelő A^{opp}-beli elem, tehát ha nyilak szorzataként írjuk föl, akkor a nyilak sorrendje megfordul. Felbonthatatlan projektívek direkt összegei között vezető homomorfizmusokat a komponensek közötti homomorfizmusok mátrixaként írhatjuk (jobbról írva egy adott komponens generátoreleme képének a komponensei a megfelelő sorszámú sorba kerülnek), és a *-leképezénél a mátrixot transzponálni kell.

A megadott algebrát és bal oldali reguláris modulusát megadtuk a 3. feladatsor 4. feladatában: Az algebra gráfja Γ:

$$\begin{tikzcd} \underset{1}{\bullet} \arrow[r, "\gamma"] & \underset{2}{\bullet} \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

és $A \cong K\Gamma/I$, ahol $I = (\gamma\beta^2, \beta^3)$. ${}_AA$ Loewy-diagramja megegyezik $A^{opp}_{A^{opp}}$ Loewy-diagramjával. A^{opp} gráfja Γ^{opp}:

$$\begin{tikzcd} \underset{1}{\bullet} & \underset{2}{\bullet} \arrow[l, "\gamma'"'] \arrow[loop right, "\beta'"] \end{tikzcd}$$

és $I^{opp} = ((\beta')^2\gamma', (\beta')^3)$. Ebből azt kapjuk, hogy

$$ {}_AA = A^{opp}_{A^{opp}} = {\scriptstyle 1} \oplus \begin{smallmatrix} &2&&\\ 1&&2&\\ &&1&2 \end{smallmatrix} = P_1^* \oplus P_2^*. $$

A megadott $\alpha : P_2 \to P_1$ homomorfizmus $\alpha : e_2 \mapsto \gamma\beta$, így a képe $\alpha^* : P_1^* \to P_2^*$, $\alpha^* : e_1' \to (\gamma\beta)' = \beta'\gamma'$.

Az $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ modulus AR-eltoltjának kiszámítása:

$$ \xi : \begin{smallmatrix}2\\2\\2\end{smallmatrix} \xrightarrow{\alpha} \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \to 0 \qquad \xi^* : \cdots \longrightarrow {\scriptstyle 1} \xrightarrow{\alpha^*} \begin{smallmatrix} &2&&\\ 1&&2&\\ &&1&2 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} &2&&\\ 1&&2&\\ &&&2 \end{smallmatrix} \to 0 \qquad \tau(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix} &&&2\\ 1&&2&\\ &2&& \end{smallmatrix}. $$

5. *Határozzuk meg az A algebra Auslander–Reiten-gráfját, ha $A_A = \begin{smallmatrix}1\\3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$.*

Megoldás: Amint a 3. feladatsor 7. feladatában kiszámítottuk,

$$ A_A = \begin{smallmatrix}1\\3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}\text{-ra} $$

$$ {}_AA = \begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\\&1&\end{smallmatrix} \oplus {\scriptstyle 2} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}, \text{ és} $$

$$ D({}_AA) = \begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\\&1&\end{smallmatrix} \oplus {\scriptstyle 2} \oplus \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}. $$

Az algebra gráfja legyen $2 \xrightarrow{\alpha} 1 \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} 3$. Számítsuk ki először az injektív modulusok τ-orbitjait. Az eltoltakból az egyszerű eseteket kiszámítottuk a 3. feladatban, a többihez használjuk a 4. feladatban leírt módszert.

$$ \xi : \begin{smallmatrix}1\\3\\1\end{smallmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\\&1&\end{smallmatrix} \to 0, \qquad \varphi = [\,\alpha \quad \beta\gamma\,], $$

$$ \xi^* : {\scriptstyle 2} \oplus \begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\\&1&\end{smallmatrix} \xrightarrow{\varphi^*} \begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\\&1&\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}, \qquad \varphi^* = \begin{bmatrix} \alpha' \\ \gamma'\beta' \end{bmatrix}, \quad \tau(\begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\\&1&\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} $$

$\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$ projektív, így ez az orbit véget ért.

$$ \tau({\scriptstyle 2}) = \begin{smallmatrix}1\\3\\1\end{smallmatrix} \text{ a 3. feladat szerint,} $$

és $\begin{smallmatrix}1\\3\\1\end{smallmatrix}$ is projektív.

$$ \xi : \begin{smallmatrix}1\\3\\1\end{smallmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{smallmatrix}1\\3\\1\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix} \to 0, \qquad \varphi = [\,\beta\gamma\,] $$

$$ \xi^* : \begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\\&1&\end{smallmatrix} \xrightarrow{\varphi^*} \begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\\&1&\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\end{smallmatrix} \to 0, \qquad \varphi^* = [\,\gamma'\beta'\,], \quad \tau(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}2&&3\\&1&\end{smallmatrix} $$

$$ \xi : \begin{smallmatrix}1\\3\\1\end{smallmatrix} \xrightarrow{\alpha} \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}2&&3\\&1&\end{smallmatrix}, \qquad \varphi = [\,\alpha \quad \gamma\,] $$

$$ \xi^* : {\scriptstyle 2} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \xrightarrow{\varphi^*} \begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\\&1&\end{smallmatrix} \longrightarrow {\scriptstyle 1}\,. \qquad \varphi = \begin{bmatrix} \alpha' \\ \gamma' \end{bmatrix}, \quad \tau(\begin{smallmatrix}2&&3\\&1&\end{smallmatrix}) = {\scriptstyle 1} $$

$$ \tau({\scriptstyle 1}) = {\scriptstyle 3} \text{ a 3. feladat szerint.} $$
$$ \tau({\scriptstyle 3}) = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \text{ a 3. feladat szerint,} $$

és ezzel ez az orbit is véget ért. Felhasználva a 3. feladatsor 7. feladatának eredményét a projektívekbe menő és az injektívekből induló irreducibilis morfizmusokról, a τ-orbitokat össze tudjuk kapcsolni, és az összes szereplő modulus teljes AR-sorozatát megkapjuk (a dimenziókkal lehet ellenőrizni), tehát ezek a modulusok az AR-gráf egy teljes komponensét adják, és mivel ez a komponens véges, ez a teljes AR-gráf.

6. *Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbb{Z}_3D_3$ csoportalgebra izomorf azzal a $\mathbb{Z}_3$ fölötti gráfalgebrával, amelyre a jobb reguláris modulus Loewy-diagramja* $\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix}$.

Megoldás: Jelöljük a $\mathbb{Z}_3S_3 \cong \mathbb{Z}_3D_3$ csoportalgebrát A-val, és legyen $D_3 = \langle f, t\rangle$, ahol f egy harmadrendű forgatás, t pedig egy tükrözés. $0 = 1 - f^3 = (1-f)^3$ miatt $1 - f \in A$ nilpotens elem. Továbbá $(1-f)t = t(1-f^2) = -tf^2(1-f)$ és $(1-f)f = f(1-f)$ miatt $(1-f)A \leq A(1-f)$, és így $((1-f)A)^3 \leq A^3(1-f)^3 = 0$, tehát $J = (1-f)A$ nilpotens jobbideál (sőt ideál), így $J \leq J(A)$. J-nek bázisa $\{\, 1-f, f-f^2, t-ft, ft-f^2t \,\}$, tehát J négydimenziós, másrészt D_3-nak van két különböző irreducibilis lineáris reprezentációja: a triviális és az, amelyik a tükrözésekhez -1-et, a forgatásokhoz 1-et rendel, ezért $A/J(A)$-nak homomorf képe $S_1 \oplus S_2$, ahol S_1, S_2 az előbbi reprezentációkhoz tartozó egydimenziós modulusok, tehát $J(A)$ legföljebb négydimenziós, és emiatt $J(A) = (1-f)A$.

Mivel $A/J(A) \cong \oplus P_i/\operatorname{rad} P_i$, és $A/J(A)$ két egyszerű modulus direkt összege, A_A két felbonthatatlan projektív modulus összegére bomlik. Egy idempotenst viszont könnyen találunk: $(1+t)^2 = -1-t$ miatt $-1-t$, és ennek kiegészítője, $-1+t$ idempotens elemek, $P_1 = (-1-t)A$ és $P_2 = (-1+t)A$ az A összes felbonthatatlan projektív modulusa: $A_A = P_1 \oplus P_2$. Mindkettő háromdimenziós, de nem izomorfak, mert $P_1/\operatorname{rad} P_1$ és $P_2/\operatorname{rad} P_2$ a két nem izomorf egyszerű modulus kell, hogy legyen.

Legyen $e_1 = -1-t$ és $e_2 = -1+t$. A feladatban megadott gráfalgebra a $\Gamma : 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2$ gráfhoz tartozó $B = K\Gamma/I$ algebra, ahol $I = (\alpha\beta\alpha, \beta\alpha\beta)$. $J(B)$ a legalább egy hosszú utak lineáris kombinációiból áll, így $e_1J(B)e_2 = K\alpha$, és $e_2J(B)e_1 = K\beta$. Tehát az izomorfizmus megmutatásához $e_1J(A)e_2$ és $e_2J(A)e_1$ egy-egy generátorelemét kell nyílnak választani. $J(A) = (1-f)A$, így legyen $\alpha = e_1(f-1)e_2 = e_1fe_2 - e_1e_2 = e_1fe_2$ és $\beta = e_2(f-1)e_1 = e_2fe_1 - e_2e_1 = e_2fe_1$. Az nyilvánvaló, hogy $\alpha\beta\alpha = \beta\alpha\beta = 0$, ugyanis mindegyik eleme $J(A)^3$-nek, ami $(1-f)^3 = 0$ miatt 0. Mivel $\alpha = e_1\alpha e_2$ és $\beta = e_2\beta e_1$, az idempotensek és a nyilak szorzata megfelel a gráfalgebrabeli szorzatnak. Ezenkívül csak azt kell belátni, hogy $P_1 = \langle e_1, \alpha, \alpha\beta\rangle$ és $P_2 = \langle e_2, \beta, \beta\alpha\rangle$, amihez elég megmutatni, hogy a megadott három-három elem lineárisan független. $\alpha = e_1fe_2 = e_1f(-1+t) = e_1(-f+tf^2) = e_1(-f+f^2)$, ugyanis $e_1t = (-t-1)t = -1-t = e_1$, és $\alpha\beta = e_1fe_2e_2fe_1 = e_1fe_2fe_1 = e_1(-f+f^2)fe_1 = e_1(1-f^2)(-1-t) = e_1(-1+f^2-t+f^2t) = e_1(-1+f^2-t+tf) = e_1(-1+f^2-1+f) = e_1(1+f+f^2)$. Azt is tudjuk, hogy $e_1t = e_1$ miatt e_1A bázisa $\{\, e_1, e_1f, e_1f^2 \,\}$, és ebből következik, hogy $\{\, e_1, \alpha, \alpha\beta \,\} = \{\, e_1, e_1(-f+f^2), e_1(1+f+f^2) \,\}$ is bázis P_1-ben. Hasonlóan, az $e_2t = (-1+t)t = 1-t = -e_2$ összefüggést felhasználva kapjuk, hogy az $\{\, e_2, \beta, \beta\alpha \,\} = \{\, e_2, e_2(-f-f^2), e_2(1+f+f^2) \,\}$ halmaz bázisát alkotja P_2-nek.

7. *Bizonyítsuk be, hogy ha a K test karakterisztikája p, akkor egy tetszőleges G véges p-csoport KG csoportalgebrájának Jacobson-radikálja azokból az elemekből áll, amelyekben az együtthatók összege 0. Hány nem izomorf egyszerű modulus van KG fölött?*

Megoldás: Először belátjuk $|G|$-re vonatkozó indukcióval, hogy G-nek egyetlen irreducibilis reprezentációja van, a triviális reprezentáció. Legyen $\varphi : G \to GL(V)$ irreducibilis. Mivel G p-csoport, $Z(G) \neq 1$. Legyen $1 \neq g \in Z(G)$. Ha $|G| = p^n$, akkor $(\varphi(g))^{p^n} = \varphi(g^{p^n}) = \varphi(1) = I$, így $\varphi(g)$ minimálpolinomja osztója az $x^{p^n} - 1 = (x-1)^{p^n}$ (a p karakterisztika miatt!) polinomnak, ezért $\varphi(g)$-nek van 1-hez tartozó sajátvektora. Legyen V_1 a $\varphi(g)$ transzformáció 1-hez tartozó sajátaltere. A $g \in Z(G)$ feltevés miatt ez $\operatorname{Im}\varphi$-invariáns, így $V_1 = V$, és $g \in \operatorname{Ker}\varphi$. De akkor $\bar{\varphi} : G/\langle g\rangle \to GL(V)$ is irred reprezentáció, és az indukciós feltevés miatt triviális, tehát φ is az.

Legyen $A = KG$ és $M_0 = \{\sum_{g\in G} \lambda_g g \mid \sum_{g\in G} \lambda_g = 0\}$. M_0 nyilván részmodulus A_A-ban, és 1 kodimenziós, tehát maximális is. Másrészt bármely M maximális modulusra A_A/M az egyetlen, triviális modulussal lehet csak izomorf, így a faktormodulusban $1 \cdot g = 1$, azaz $1 - g \in M$ minden $g \in G$-re. Viszont ezek az elemek kigenerálják M_0-t, tehát, $M_0 \leq M$, és így az M_0 maximalitása miatt $M = M_0$. Ezzel beláttuk, hogy M_0 az egyetlen maximális részmodulus A_A-ban, és így $J(A) = M_0$.

Hf1. *Legyen* $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0$ *egzakt sorozat. Bizonyítsuk be, hogy ha* α *irreducibilis, és* $\operatorname{Im}\alpha \leq Y_1 < Y$, *akkor* $\operatorname{Im}\alpha$ *direkt összeadandója* Y_1*-nek.*

Hf2. *Legyen* $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$. *Adjuk meg a* $\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}$ *modulus Auslander–Reiten-eltoltját.*