*Gyűrűk és csop. repr.* **5. feladatsor** *2011. október 13.*

**1.** *Legyen* $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3\\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$. *Bizonyítsuk be, hogy $A$ Frobenius-algebra.*

*Megoldás:* Az algebra gráfja $\Gamma : 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\delta}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} 3$, és $A = K\Gamma/I$, ahol $I = (\alpha\beta, \delta\gamma, \beta\alpha - \gamma\delta)$. $A_A$ talpa $\operatorname{soc} A_A = \langle \alpha\gamma, \beta\alpha, \delta\beta\rangle = S_3 \oplus S_2 \oplus S_1$. Mivel $S_i = P_i / \operatorname{rad} P_i$, minden $x \in S_i$-re $xe_i = x$ és $xe_j = 0$, ha $j \neq i$. Legyen $\varphi : A \to K$ az a lineáris leképezés, amely 1-et vesz föl $\alpha\gamma$-n, $\beta\alpha$-n és $\delta\beta$-n, és 0-t a bázis kiegészítő részén: $\{ e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta, \gamma, \delta \}$-n. Belátjuk, hogy $\operatorname{Ker}\varphi$ nem tartalmaz nem nulla jobbideált. Legyen ugyanis $0 \neq u \in M \leq A_A$, és $k$ a legkisebb szám, amire $uJ(A)^k \neq 0$. Ekkor van $0 \neq v \in uJ(A)^k$, és erre $vJ(A) = 0$, vagyis $vA \leq M$ féligegyszerű. Ebből következik, hogy $vA \leq \operatorname{soc} A_A$, tehát $v = x\alpha\gamma + y\beta\alpha + z\delta\beta$ valamely $x, y, z \in K$-ra. A három együttható közül legalább az egyik nem 0, és ha az $S_i$-belinek az együtthatója az, akkor $0 \neq ve_i \in M$. De ekkor $ve_i$ $\alpha\gamma, \beta\alpha, \delta\beta$ egyikének nem 0 skalárszorosa, így ezen a $\varphi$ értéke nem 0, tehát $M$ nincs benne $\operatorname{Ker}\varphi$-ben. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\operatorname{soc}{}_A A = \langle \alpha\gamma, \beta\alpha, \delta\beta\rangle = S_1^\circ \oplus S_2^\circ \oplus S_3^\circ$ is igaz (ahol $S_i^\circ = P_i^\circ / \operatorname{rad} P_i^\circ$, és $P_i^\circ = Ae_i$), és ebből kijön, hogy $\operatorname{Ker}\varphi$ nem 0 balideált sem tartalmaz.

**2.** *Bizonyítsuk be, hogy minden öninjektív bázisalgebra Frobenius-algebra.*

*Megoldás:* Útmutatás: Legyen $b_1, \ldots, b_n$ a projektív-injektív komponensek egyszerű talpából egy-egy nem 0 elem. Vigye $\varphi$ ezeket 1-be, és egy kiegészítő altér elemeit 0-ba.

**3.** *Keressük meg $C_3$ irreducibilis reprezentációit egy tetszőleges $K$ test fölött! Határozzuk meg $KC_3$ részmodulusait, ha $K$ karakterisztikája* 3.

*Megoldás:* $C_3$ reprezentációi $GL(V)$-be menő csoport-homomorfizmusok. A reprezentációt meghatározza a $C_3$ generátorelemének a képe: egy olyan $A$ mátrix, amelyre $A^3 = I$. Ahhoz, hogy a reprezentáció irreducibilis legyen, az kell, hogy $V$-nek ne legyen $A$-invariáns valódi altere. Legyen $m(x)$ az $A$ minimálpolinomja. $A^3 = I$ miatt $m(x) \mid x^3 - 1$. Ha $m(1) = 0$, akkor 1 sajátértéke $A$-nak, tehát $A$-nak van sajátvektora, és az ez által generált altér $A$-invariáns, azaz ekkor $\dim V = 1$, és $A$ triviálisan hat rajta. $\operatorname{char} K = 3$ esetén $x^3 - 1 = (x-1)^3$, ezért ekkor más irreducibilis reprezentáció nincs is.

Tegyük fel most, hogy $\operatorname{char} K \neq 3$ és $m(1) \neq 0$. Ekkor $m(x) \mid x^2 + x + 1$. Ha $x^2 + x + 1$ reducibilis $K$ fölött, akkor a gyökei különbözőek (ugyanis $x^3 - 1$-nek sincs többszörös gyöke 3-tól különböző karakterisztika esetén, mert $x^3 - 1$ relatív prím a deriváltjához), és mindkét sajátértékhez tartozik egy egydimenziós reprezentáció. Ekkor $C_3$-nak három elsőfokú reprezentációja van.

Ha $x^2 + x + 1$ irreducibilis $K$ fölött, akkor tetszőleges $v \in V$-re a $v$ és $vA$ által generált altér $A$-invariáns (ui. $vA^2 = -v - vA$), és ennek már nincs $A$-invariáns altere, mert akkor $A$-nak lenne sajátvektora. Tehát ilyenkor $\dim V = 2$, és ilyen reprezentáció valóban létezik: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Több irreducibilis reprezentáció nem lehet, mert $1 + 2 = \dim \mathbb{C}C_3$.

3 karakterisztikájú $K$ test esetén $KC_3$ minimális részmodulusa csak olyan $x + ya + za^2$ elemekből állhat (ahol $C_3 = \langle a \rangle$), amelyekre $(x + ya + za^2)a = z + xa + ya^2 = x + ya + za^2$, azaz $x = y = z$, mert $KC_3$ egyetlen irreducibilis modulusa a triviális modulus. Tehát $M_1 = \{ \lambda(1 + a + a^2) \mid \lambda \in K \}$ az egyetlen minimális részmodulus $KC_3$-ban, efölött maximális modulus pedig szintén csak egy van, ugyanis csak olyan $u$ elemek lehetnek benne, amelyekre $ua - u \in M_1$, hogy $M_2/M_1$ triviális egyszerű modulus legyen, és ilyenek csak azok az $x + ya + za^2$ elemek, amelyekre $x + y + z = 0$.

**4.** *Mikor ekvivalens két lineáris (azaz egydimenziós) reprezentáció?*

*Megoldás:* Csak akkor, ha egyenlők. Ugyanis $GL_1(K) \cong K^\times$, és ez kommutatív, tehát a konjugált elemek egyenlők is.

**5.** *Hány különböző lineáris reprezentációja van $\mathbb{C}$ fölött egy $G$ csoportnak?*

*Megoldás:* Egy lineáris reprezentáció $\mathbb{C}^\times$-ba menő csoport-homomorfizmus. Mivel $\mathbb{C}^\times$ kommutatív, a homomorfizmus magja tartalmazza $G'$-t, tehát megfelel egy $G/G'$-ből menő homomorfizmusnak. $G/G'$ ciklikus csoportok direkt szorzata a véges Abel-csoportok alaptétele miatt, és a generátorelemek minden olyan $\mathbb{C}^\times$-be menő leképezése kiterjeszthető homomorfizmussá, ahol a kép rendje osztója az elem rendjének. Így $C_{n_1} \times \ldots \times C_{n_r}$-ből $n_1 n_2 \cdots n_r$ különböző homomorfizmus megy $\mathbb{C}^\times$-be, vagyis $G$-nek $|G/G'|$ különböző lineáris reprezentációja van $\mathbb{C}$ fölött.

**6.** *Adjuk meg $C_2 \times C_2$ irreducibilis reprezentációit egy tetszőleges $K$ test fölött!*

*Megoldás:* $C_2 \times C_2$ homomorfizmusait $GL(V)$-be megadja a két komponens generátorelemének homomorf képe, $A$ és $B$, azaz olyan mátrixpár, amelyre $A^2 = B^2 = I$ és $AB = BA$. $A$ és $B$ minimálpolinomja osztója $x^2 - 1$-nek, tehát mindenképpen van $K$-ban sajátértékük. Legyen $V_1$ az $A$-nak egy sajátaltere. $AB = BA$ miatt ez $B$-invariáns: $vA = \lambda v$ esetén $(vB)A = v(BA) = v(AB) = (vA)B = \lambda vB$. Ebben $B$-nek van sajátvektora is, ismét a $B^2 = I$ feltétel miatt, tehát van $A$-nak és $B$-nek közös sajátvektora, azaz $V$-nek egydimenziós $C_2 \times C_2$-invariáns altere. Így az irreducibilis reprezentáció csak egydimenziós lehet, azaz $\mathbb{C}^\times$-be vezető homomorfizmus. Ez mindkét generátor elemet 1-be vagy $-1$-be viheti, és ezek valóban homomorfizmust adnak, tehát $\operatorname{char} K = 2$ esetén egyetlen, egydimenziós irreducibilis reprezentáció van, minden más esetben négy.

**7.** *Határozzuk meg $\mathbb{Z}_2(C_2 \times C_2)$ részmodulusait! Rajzoljuk föl a részmodulushálóját!*

*Megoldás:* Mivel $G = C_2 \times C_2$ 2-csoport, a 4. feladatsor 7. feladata szerint egyetlen (triviális) irreducibilis reprezentációja van $\mathbb{Z}_2$ fölött, és az $A = \mathbb{Z}_2 G$ csoportalgebrának egyetlen maximális részmodulusa van: amelyik azokból az elemekből áll, amelyekben az együtthatók összege 0.

Legyen $a$ és $b$ a $G$ csoport két generátoreleme. Minden $M_0$ minimális modulus izomorf a triviális modulussal, vagyis minden $m = x + ya + zb + uab \in M_0$ elemre $ma = y + xa + ub + zab = m$ és $mb = z + ua + xb + yab = m$. Ebből $x = y = z = u$, tehát $M_0 \leq \{\, \lambda(1 + a + b + ab) \mid \lambda \in \mathbb{Z}_2 \,\}$, és mivel ez utóbbi egydimenziós, egyenlő is $M_0$-val.

$A_A/M_0$-ban minimális részmodulust olyan $m = x+ya+zb+uab$ elemek generálhatnak, amelyekre $m - ma$ és $m - mb$ is $M_0$-ban van, azaz $x - y = y - x = z - u = u - z$ és $x - z = y - u = z - x = u - y$. $\mathbb{Z}_2$ fölött ez ekvivalens azzal, hogy $x + y + z + u = 0$, azaz hogy $m \in J(A)$, ahol $J(A)$ az $A$ egyetlen maximális részmodulusa. Ez azt jelenti, hogy a $J(A)/M_0$ kétdimenziós vektortér minden egydimenziós alterének őseképe részodulus. Mivel ilyenekből éppen három van (legyenek ezek $M_1$, $M_2$ és $M_3$), a részmodulusháló a következő:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=tiny]
 & A \arrow[d, dash] & \\
 & J(A) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
M_1 \arrow[dr, dash] & M_2 \arrow[d, dash] & M_3 \arrow[dl, dash] \\
 & M_0 \arrow[d, dash] & \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$