1. *Bizonyítsuk be, hogy egy Abel-csoportnak minden $\mathbb{C}$ fölötti irreducibilis reprezentációja lineáris! Mi a helyzet tetszőleges test fölött?*

Megoldás: A lineáris reprezentációk nyilvánvalóan irreducibilisek. Az 5. feladatsor 5. feladata szerint egy G Abel-csoportnak $|G|$ lineáris reprezentációja van. De tudjuk, hogy az irreducibilis reprezentációk fokának összege nem nagyobb $\mathbb{C}G$ dimenziójánál, azaz $|G|$-nél, tehát más irreducibilis reprezentációja nincs is G-nek.

Ez más test fölött nem feltétlenül igaz, például C_3-nak $\mathbb{Z}_2$ fölött van másodfokú irreducibilis reprezentációja (ld. az 5. feladatsor 2. feladatát). Algebrailag zárt test fölött viszont mindig lineárisak az irreducibilis karakterek, ugyanis tetszőleges elemnek van sajátértéke, és az ehhez tartozó sajátaltér a vele felcserélhető elemekre, tehát az egész csoportra nézve invariáns, így az irreducibilitásból következik, hogy a sajátaltér a teljes vektortér. Mivel ez minden elemre igaz, a vektortér egy tetszőleges egydimenziós altere is G-invariáns, így a vektortér csak 1-dimenziós lehet. Viszont a lineáris karakterek száma lehet ekkor is kisebb a G elemszámánál, ha a karakterisztika osztja a csoport rendjét.

2. *Adjuk meg S_4-nek egy 3-dimenziós valós irreducibilis reprezentációját, és határozzuk meg ennek a reprezentációnak a karakterét.*

Megoldás: A szabályos tetraéder egybevágósági csoportja S_4, és ha egy ilyen tetraédert középpontját az origóba tesszük, akkor az egybevágóságai a 3-dimenziós valós téren lineáris transzformációk lesznek. Vegyük fel azt a bázist, amelynek elemei az origóból a tetraéder három csúcsába mutató vektorok (ekkor a negyedik csúcsba mutató vektor ezek összegének ellentettje, mert az átlaguk $\mathbf{0}$ kell, hogy legyen). Ebben felírva minden konjugáltosztályból egy transzformációt, a következő mátrixokat kapjuk (a permutációknak az a transzformáció felel meg, amelyik a négy csúcsot az adott permutáció szerint permutálja, és a három bázisvektor az első három csúcs helyvektora):

$$X(1)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad X((12)(34))=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\qquad X((123))=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$X((12))=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad X((1234))=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}.$$

Így $\chi(1)=3$, $\chi((12)(34))=-1$, $\chi((123))=0$, $\chi((12))=1$, $\chi((1234))=-1$.

3. *Bizonyítsuk be, hogy egy irreducibilis karakternek és egy lineáris karakternek a szorzata mindig irreducibilis.*

Megoldás: Legyen $\chi\in\operatorname{Irr}G$ és λ lineáris. Ekkor $[\lambda\chi,\lambda\chi]=\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\lambda(g)\chi(g)\overline{\lambda(g)\chi(g)}=\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}|\lambda(g)|^2|\chi(g)|^2$. De $\lambda(g)$ egységgyök, így $|\lambda(g)|^2=1$, és ezért az utóbbi összeg $[\chi,\chi]=1$.

4. *Határozzuk meg A_4 és S_5 karaktertábláját.*

Megoldás: A_4-nek a kommutátor részcsoportja a 4-elemű Klein-csoport, így három lineáris karaktere van, ami az $A_4/A_4'\cong C_3$ karaktereinek felel meg: a harmadrendű elem tetszőleges harmadik egységgyökbe képződhet, az inverze pedig ennek konjugáltjába. Az egyetlen nem lineáris karaktert ezután az ortogonalitási relációk segítségével is kiszámíthatjuk, de megkaphatjuk úgy is, mint S_4 már ismert (valamelyik) 3-adfokú irreducibilis reprezentációjának A_4-re való megszorítottját. A karaktertáblában ε primitív harmadik egységgyök.

A_4	1	(..)(..)	$(123)^G$	$(321)^G$
	1	1	1	1
	1	1	ε	$\bar{\varepsilon}$
	1	1	$\bar{\varepsilon}$	ε
	3	-1	0	0

$G = S_5$-nek hét konjugáltosztálya van: 1, (..)(..), (...), (.....), (..), (....), (...)(..), amelyeknek az elemszáma rendre $1, 15, 20, 24, 10, 30, 20$. Az 5 elemű Young-diagramokhoz tartozó partíciók lexikografikus sorrendben $5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1$. Számítsuk ki az ezekhez tartozó $\chi_1, \dots, \chi_7$ irreducibilis karaktereket! A χ_1 és χ_7 lineáris karaktereket eleve ismerjük, és tudjuk, hogy a transzponált diagramhoz tartozó irreducibilis karakter az eredetinek χ_7-szerese, így elég a χ_2, χ_3 és χ_4 karaktereket meghatározni. Az $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz $4+1$ alakú partícióin vett csoporthatáshoz tartozó φ_2 karakter értékei (azaz a konjugáltosztályok egy-egy reprezentáns elemének fixpontszáma): $(5, 1, 2, 0, 3, 1, 0)$. Ebben (mint minden tranzitív permutációs karakterben) 1-szer szerepel az 1_G, és a $\chi_2 = \varphi_2 - 1_G$ karakter irreducibilis, mert a skalárnégyzete 1. A 3+2 partíciókon való csoporthatáshoz tartozó $\varphi_3 : (10, 2, 1, 0, 4, 0, 1)$. $[\varphi_3, 1_G] = [\varphi, \chi_2] = 1$, és $\chi_3 = \varphi_3 - 1_G - \chi_2$ már irreducibilis. Végül a $3+1+1$ alakú partíciókon (ahol a halmazok sorrendje is számít!) való hatásból a $\varphi_4 : (20, 0, 2, 0, 6, 0, 0)$ karaktert kapjuk, amelyre $[\varphi_4, 1_G] = [\varphi_4, \chi_3] = 1$ és $[\varphi_4, \chi_2] = 2$, és $\chi_4 = \varphi_4 - 1_G - 2\chi_2 - \chi_3$ irreducibilis. A többi irreducibilis karaktert megkapjuk a meglevőknek a χ_7 lineáris karakterrel való szorzásával.

S_5	1 1	(..)(..) 15	(...) 20	(.....) 24	(..) 10	(....) 30	(..)(...) 20
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_7	1	1	1	1	-1	-1	-1
χ_2	4	0	1	-1	2	0	-1
χ_3	5	1	-1	0	1	-1	1
χ_4	6	-2	0	1	0	0	0
χ_5	5	1	-1	0	-1	1	-1
χ_6	4	0	1	-1	-2	0	1

5. *Bizonyítsuk be, hogy egy nemtriviális csoport karaktertáblájának minden sorában és minden oszlopában legalább két nemnulla szám van.*

Megoldás: A triviális karakter sorára nyilván igaz ez. Ha $1_G \neq \chi \in \operatorname{Irr} G$, akkor $0 = [\chi, 1_G] = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} \chi(g) = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{i=1}^{k} |\mathcal{K}_i| \, \chi(g_i)$, és $\mathcal{K}_1 = \{1\}$ esetén $\chi(g_1) \neq 0$, így van másik konjugáltosztály is, amelynek g_i reprezentáns elemére $\chi(g_i) \neq 0$.

Az 1-nek az oszlopa a karakterek fokait tartalmazza: ezek nem nullák, $g \neq 1$-re pedig $\sum\limits_{i=1}^{k} \chi_i(g)\chi_i(1) = 0$, és a tagok közül $1_G(g)1_G(1) \neq 0$, így van még egy nem nulla tag.

6. *Bizonyítsuk be, hogy 1_G mindig szerepel egy permutációs karakter irreducibilis összeadandói között. Mennyi az 1_G együtthatója?*

Megoldás: Egy csoporthatáshoz tartozó permutációs karakter értéke egy adott elemen az adott csoportelem fixpontjainak a száma, így az 1_G-vel való skalárszorzat a fixpontok átlaga. Ez a Burnside-lemma szerint (ld. a 7. feladatsor 2. feladatát) éppen az orbitok száma. Így tranzitív csoporthatásnál az 1_G egyszer szerepel a permutációs karakterben, és általában a multiplicitása az orbitok száma.

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy egy 28 elemű nem kommutatív csoportnak van másodfokú irreducibilis reprezentációja $\mathbb{C}$ fölött.*

Hf2. *Egy papirusztekercsen egy táblázatot találtak, amiről feltételezik, hogy egy véges csoport karaktertáblája. Sajnos, néhány helyen már nem olvasható a szám. Egészítsük ki a táblázatot (vegyük figyelembe, hogy a sorok és oszlopok esetleg nem a megszokott sorrendben vannak, tehát az 1 elemhez tartozó oszlop nem feltétlenül az első, és a triviális karakter nem feltétlenül az első sorba került)! Mekkora a csoport rendje, konjugáltosztályainak mérete, milyen rendű normálosztói vannak? Mekkora a csoport centruma? Hány olyan csoport van, aminek ez a karaktertáblája?*

1		1		-1	
1		1	-1		
	2	-1	-1	0	0
1		1	-1	-1	1
2	-2	-1	1		

Hf3. *Legyen $H \leq G$ és χ a H csoport egy karaktere. Bizonyítsuk be, hogy* $\operatorname{Ker} \chi^G = \bigcap\limits_{x \in G} (\operatorname{Ker} \chi)^x$.