1. *Bizonyítsuk be, hogy ha $\chi = \sum_{\chi_i \in \mathrm{Irr}\, G} a_i\chi_i$ a G csoportnak egy karaktere, akkor* $\mathrm{Ker}\,\chi$ *azon χ_i irreducibilis karakterek magjának a metszete, amelyekre $a_i \neq 0$.*

Megoldás: $\cap \mathrm{Ker}\,\chi_i \leq \mathrm{Ker}\,\chi$ nyilvánvaló, így a másik irányt kell csak bizonyítani. Tegyük fel, hogy $g \in \mathrm{Ker}\,\chi$. Ekkor $\chi(1) = \chi(g) = \sum a_i\chi_i(g)$, és így

$$\chi(1) = |\chi(g)| = |\sum a_i\chi_i(g)| \leq \sum a_i|\chi_i(g)| \leq \sum a_i\chi_i(1) = \chi(1).$$

Így az előbbi egyenlőtlenségben végig egyenlőség áll. A háromszög-egyenlőtlenségben csak akkor lehet egyenlőség, ha minden tag párhuzamos és egyirányú, azaz $\chi_i(g)$ és $\chi_j(g)$ egyirányúak, ha a_i és a_j nem nullák (felhasználva azt is, hogy minden a_i együttható nemnegatív valós szám). De akkor a korábbi egyenlőség miatt a $\chi_i(g)$ komplex szám $\chi(1)$-gyel is párhuzamos ($a_i \neq 0$ esetén), tehát nemnegatív valós szám. A második egyenlőtlenség egyenlőség voltából pedig következik, hogy $\chi_i(1) = |\chi_i(g)| = \chi_i(g)$, ha $a_i \neq 0$, vagyis g benne van azon χ_i karakterek magjának metszetében, amelyekre $a_i \neq 0$.

2. *Bizonyítsuk be a Burnside-lemmát: ha $\varphi : G \to S_n$ a G csoportnak egy n elemű halmazon való csoporthatása, akkor G elemei fixpontszámának átlaga megegyezik az orbitok számával.*

Megoldás: Számoljuk meg kétféleképpen a $\mathcal{H} = \{(g,i) \mid ig = i\}$ halmaz elemszámát. A csoportelemek szerint csoportosítva ez $\sum_{g\in G} |Fix(g)|$, az alaphalmaz elemei szerint csoportosítva pedig a stabilizátorok elemszámának az összege. De egy i elem stabilizátorának elemszáma $|G|/|iG|$, ahol iG az i orbitja, tehát ha ezeket még tovább csoportosítjuk az orbitok szerint, akkor minden orbitra $|G|$ egy példányát adjuk össze, így az elemszám az orbitok számának $|G|$-szerese. A két eredmény egyenlőségéből rörtön adódik az állítás.

3. *Bizonyítsuk be, hogy egy 2-tranzitív csoporthatás által megadott χ permutációs karakterre $\chi - 1_G$ irreducibilis karakter.*

Megoldás: Egy csoporthatás 2-tranzitív, ha bármely, két különböző elemből álló rendezett elempárt el tud vinni bármely másik ilyen párba. Ebből következik, hogy a csoporthatás tranzitív is, tehát a Burnside-lemma miatt a fixpontok átlaga 1, azaz $[\chi, 1_G] = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)| = 1$, és így $\chi - 1_G$ is karakter. Ha pedig a $[\chi,\chi] = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)|^2$ skalárnégyzetet számoljuk ki, ez nem más, mint a csoport rendezett elempárokon való hatásának fixpontátlaga, és az utóbbinak két orbitja van: az azonos elemből álló párok, és a különböző elemekből állók. Tehát $[\chi,\chi] = 2$, amiből $[\chi - 1_G, \chi - 1_G] = [\chi,\chi] - 2[\chi, 1_G] + [1_G, 1_G] = 2 - 2 + 1 = 1$, ezért $\chi_i - 1_G$ irreducibilis karakter.

4. *Bizonyítsuk be, hogy egy G Abel-csoport karaktertáblájában egy elem rendje megegyezik az oszlopában szereplő komplex egységgyökök rendjének a maximumával.*

Megoldás: Mivel az Abel-csoport minden irreducibilis karaktere lineáris, a karakterek egyúttal reprezentációk is, ezért egy g n-edrendű elem oszlopában minden szám n-edik hatványa 1. Azt kell csak belátni, hogy van olyan elem, amelyiknek n-nél nem kisebb a rendje, azaz van olyan $\varphi : G \to \mathbb{C}^\times$ homomorfizmus, amely g-t egy primitív n-edik egységgyökbe képezi. Bontsuk fel G-t prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzatára, és írjuk fel g-t ennek a felbontásnak megfelelően $(g_1, \ldots, g_t)$ alakban. Ekkor n a g_i-k rendjének legkisebb közös többszöröse, tehát az $n = p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$ kanonikus felbontáshoz vannak g_{i_j} elemek, amelyekre $o(g_{i_j}) = p_j^{a_j}$. Képezzük az i_j-edik komponensek generátorelemét ugyanolyan rendű komplex egységgyökbe ($j = 1, \ldots, r$-re), a többi komponenst pedig 1-be. Ez nyilván kiterjeszthető csoporthomomorfizmussá, és a relatív prím rendű egységgyökök szorzatának a rendje éppen a rendek szorzata, vagyis n lesz.

5. *Bizonyítsuk be, hogy két Abel-csoport karaktertáblája pontosan akkor egyezik meg, ha a csoportok izomorfak.*

Megoldás: Legyen $k = |G|$ a G Abel-csoportra, és tekintsük a $\varphi : G \to (\mathbb{C}^\times)^k$ leképezést, amely minden g elemhez a karaktertábla g-hez tartozó oszlopát rendeli. Mivel $\varphi\pi_i = \chi_i$ csoporthomomorfizmus minden i-re (ahol π_i az i. komponensre való vetítés), φ is csoporthomomorfizmus, továbbá $\operatorname{Ker}\varphi = \cap \operatorname{Ker}\chi_i = 1$, tehát $\operatorname{Im}\varphi$, azaz az oszlopok által alkotott részcsoport, izomorf G-vel. Ebből következik, hogy azonos karaktertáblához izomorf Abel-csoportok tartoznak.

6. *Legyen $G = H_1 \times H_2$ direkt szorzat, $\chi_1 \in \operatorname{Irr} H_1$ és $\chi_2 \in \operatorname{Irr} H_2$. Definiáljuk a $\overline{\chi}_1$ és $\overline{\chi}_2$ karaktereket G-n úgy, hogy $\overline{\chi}_1((x,y)) = \chi_1(x)$ és $\overline{\chi}_2((x,y)) = \chi_2(y)$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\overline{\chi}_1\overline{\chi}_2 \in \operatorname{Irr} G$, és G minden irreducibilis karaktere előáll ilyen alakban.*

Megoldás: Legyen a χ_i karakterhez tartozó reprezentáció $X_i : H_i \to GL(V_i)$ $i = 1, 2$-re, és $\overline{X}_i = \pi_i X$, ahol $\pi_i : G \to H_i$ az i. komponensre való vetítés. Így $\overline{\chi}_i$ karakter, és ezért $\chi = \overline{\chi}_1\overline{\chi}_2$ is az.

$$[\chi, \chi] = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\chi(g)|^2 = \frac{1}{|H_1||H_2|}\sum_{\substack{h_1\in H_1\\ h_2\in H_2}}|\chi_1(h_1)|^2|\chi_2(h_2)|^2 = [\chi_1,\chi_1][\chi_2,\chi_2] = 1,$$

tehát $\chi \in \operatorname{Irr} G$. Ha $\varphi = \overline{\varphi}_1\overline{\varphi}_2$ is egy így kapott irreducibilis karakter, akkor az előzőhöz hasonlóan $[\chi, \varphi] = [\chi_1, \varphi_1][\chi_2, \varphi_2]$, ami 0, ha $\chi_1 \neq \varphi_1$ vagy $\chi_2 \neq \varphi_2$. Tehát ha H_1-nek k_1, H_2-nek pedig k_2 konjugáltosztálya van, akkor k_1k_2 különböző irreducibilis karaktert kapunk így. Mivel $(h_1, h_2) \in G$ konjugáltosztálya $\{(h_1,h_2)^{(x_1,x_2)} \mid (x_1,x_2) \in G\} = \mathcal{K}(h_1) \times \mathcal{K}(h_2)$, G konjugáltosztályainak a száma is k_1k_2, tehát minden irreducibilis karaktert megkapunk ilyen módon.

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy ha $G \leq S_n$ 3-tranzitív permutációcsoport, ahol $n \geq 4$, és χ a G-nek az $\{1, 2, \ldots, n\}$ 2-elemű részhalmazain való hatásához tartozó permutációs karakter, akkor χ három különböző irreducibilis karakter összege.*

Hf2. *Az S_4 csoport karaktertáblája alapján*

S_4	1	(..)(..)	(...)	(..)	(....)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	2	2	-1	0	0
χ_4	3	-1	0	1	-1
χ_5	3	-1	0	-1	1

írjuk fel a két harmadfokú karakter szorzatát irreducibilis karakterek összegeként.