1. *Bizonyítsuk be, hogy az alábbi karaktertábla izomoria erejéig csak egyetlen csoport karaktertáblája lehet ($\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$).*

1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	ε	$\bar{\varepsilon}$	ε	$\bar{\varepsilon}$
1	1	1	$\bar{\varepsilon}$	ε	$\bar{\varepsilon}$	ε
3	3	-1	0	0	0	0
2	-2	0	-1	-1	1	1
2	-2	0	$-\varepsilon$	$-\bar{\varepsilon}$	ε	$\bar{\varepsilon}$
2	-2	0	$-\bar{\varepsilon}$	$-\varepsilon$	$\bar{\varepsilon}$	ε

Megoldás: A csoport 24 elemű, 2 elemű centruma van, és a konjugáltosztályok elemszáma rendre 1, 1, 6, 4, 4, 4, 4. Az első három konjugáltosztály egy 8 elemű normálosztót alkot, amelynek van nem lineáris irreducibilis karaktere (az ötödik karakter megszorítása), így ez egy nem kommutatív 8-adrendű csoport. Mivel van benne legalább 6 azonos rendű elem, a két lehetőség közül csak a kvaterniócsoport lehet. Így a csoport a kvaterniócsoportnak egy 3-elemű ciklikus csoporttal (egy 3-Sylow-részcsoporttal) vett szemidirekt szorzata. Mivel a centrum csak kételemű, ez nem direkt szorzat, tehát a C_3-nak az $\mathrm{Aut}(Q)$-ba való beágyazása határozza meg a szemidirekt szorzatot. De $\mathrm{Aut}(Q) \cong S_4$, és itt minden harmadrendű elem konjugált, tehát az összes lehetséges szemidirekt szorzat izomorf egymással.

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha $H \leq K \leq G$, és φ osztályfüggvénye H-nak, akkor $(\varphi^K)^G = \varphi^G$.*

Megoldás:

$$(\varphi^K)^G(g) = \frac{1}{|K|}\sum_{x\in G}(\varphi^K)^\circ(xgx^{-1}) = \frac{1}{|K|}\sum_{\substack{x\in G\\ xgx^{-1}\in K}}(\varphi^K)(xgx^{-1}) =$$

$$\frac{1}{|K||H|}\sum_{\substack{x\in G\\ xgx^{-1}\in K}}\sum_{y\in K}\varphi^\circ(yxgx^{-1}y^{-1}) = \frac{1}{|K||H|}\sum_{y\in K}\sum_{\substack{x\in G\\ (yx)g(yx)^{-1}\in K}}\varphi^\circ(yxgx^{-1}y^{-1}) =$$

$$\frac{1}{|K||H|}\cdot|K|\sum_{z\in G}\varphi^\circ(zgz^{-1}) = \varphi^G(g).$$

Egy másik megoldás a Frobenius-reciprocitással:
Minden $\chi_i \in \mathrm{Irr}\,G$-re $[(\varphi^K)^G, \chi_i] = [\varphi^K, (\chi_i)_K] = [\varphi, ((\chi_i)_K)_H] = [\varphi, (\chi_i)_H] = [\varphi^G, \chi_i]$, tehát $(\varphi^K)^G$-nek és φ^G-nek az irreducibilis karakterek lineáris kombinációjaként való előállításában ugyanazok az együtthatók, azaz $(\varphi^K)^G = \varphi^G$.

3. *Legyen $H, K \leq G$ úgy, hogy $HK = G$, és legyen φ osztályfüggvény a H csoporton. Bizonyítsuk be, hogy $(\varphi^G)_K = (\varphi_{H\cap K})^K$.*

Megoldás: $u \in K$-ra $\varphi^G(u) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \varphi^\circ(xux^{-1})$. Legyen $\{h_1, \ldots, h_r\} \subseteq H$ a K szerinti bal mellékosztályok egy reprezentáns rendszere, ahol $r = |G : K|$. Ekkor az előbbi összeg átírható: $\frac{1}{|H|} \sum_{i=1}^{r} \sum_{v \in K} \varphi^\circ(h_i vuv^{-1}h_i^{-1}) = \frac{|G:K|}{|H|} \sum_{v \in K} \varphi^\circ(vuv^{-1})$, és ez tovább $= \frac{|G:K|}{|H|} \sum_{v \in K} \varphi^\circ_{H \cap K}(vuv^{-1})$, ugyanis $vuv^{-1} \in H \Leftrightarrow vuv^{-1} \in H \cap K$. De $|G : K|/|H| = |G|/(|K| \cdot |H|) = 1/|H \cap K|$, mivel $|G| = |HK| = |H| \cdot |K|/|H \cap K|$, tehát a kapott összeg éppen $(\varphi_{H \cap K})^K(u)$.

4. *Hogyan írhatunk fel egy tetszőleges permutációs karaktert indukált karakterek összegeként? Ezt használva adjunk új megoldást a 6. feladatsor 6. feladatára: hányszor szerepel a triviális karakter egy permutációs karakter irreducibilis összetevői között?*

Megoldás: Legyen $\varphi : G \to S_\Omega$ egy csoporthatás, és V az Ω bázisú vektortér, amin az ennek megfelelő csoportreprezentáció hat. Ha $\Omega = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_t$ az Ω orbitokra bontása, akkor a $V = \Omega_1 K \oplus \ldots \oplus \Omega_t K$ a V-nek G-invariáns alterekre bontása, és a csoporthatás tranzitív minden Ω_i-n. Tranzitív csoporthatás viszont ekvivalens egy stabilizátor (legyen ez H_i az Ω_i-nél) mellékosztályán való jobbszorzás hatásával, vagyis a megfelelő karakter $(1_{H_i})^G$, és az eredeti csoporthatáshoz tartozó karakter $\chi = \sum_i (1_{H_i})^G$.

A Frobenius-reciprocitást használva azt kapjuk, hogy $[\chi, 1_G] = \sum_i [(1_{H_i})^G, 1_G] = \sum_i [1_{H_i}, (1_G)_{H_i}] = \sum_i [1_{H_i}, 1_{H_i}] = t$, vagyis az 1_G multiplicitása χ-ben megegyezik orbitok számával.

5. *Határozzuk meg A_5 karaktertábláját.*

Megoldás: $G = A_5$-nek öt konjugáltosztálya van: $\{1\}$, $\{(..)(..)\}$, $\{(...)\}$, $(12345)^G$, és $(13524)^G$, az elemszámuk rendre $1, 15, 20, 12, 12$. Az S_5 irreducibilis karaktereinek az A_5-re való megszorításával megkapunk három irreducibilis karaktert (az S_5 karaktertáblája a 4. feladatsor 3. feladatának megoldásában látható). A hiányzó kettőhöz tekintsük a $g = (12345)$ elem által generált ötödrendű H részcsoportnak egy nem triviális karakterét: $\lambda(g) = \omega$, ahol ω primitív ötödik egységgyök. A λ^G indukált karakter értékei G konjugáltosztályain: $(12, 0, 0, \omega + \omega^4, \omega^2 + \omega^3)$. Ennek a skalárszorzata χ_2-vel és χ_3-mal 1, és $\lambda^G - \chi_2 - \chi_3$-nek a skalárnégyzete 1, így $\chi_4 = \lambda^G - \chi_2 - \chi_3$ egy újabb irreducibilis karakter. Az ötödiket megkaphatjuk ortogonalitási relációkból vagy az előző mintájára a λ^2 karakter indukálásával. Az 5. egységgyököket ki is számíthatjuk, és ebből $\chi_4((12345)) = 1 + \omega + \omega^4 = (1 + \sqrt{5})/2$ és $\chi_4(g^2) = 1 + \omega^2 + \omega^3 = -\omega - \omega^4 = (1 - \sqrt{5})/2$, ha ω-nak a $\cos\frac{2\pi}{5} + i \sin\frac{2\pi}{5}$-öt vesszük.

S_5	$1^{\ 1}$	$(..)(..)^{\ 15}$	$(...)^{\ 20}$	$(.....)_1^{12}$	$(.....)_2^{12}$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	4	0	1	-1	-1
χ_3	5	1	-1	0	0
χ_4	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ_4	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

6. *Bizonyítsuk be, hogy egy G absztrakt csoport akkor és csak akkor Frobenius-csoport, ha G beágyzható egy S_Ω szimmetrikus csoportba úgy, hogy G az Ω-n nem reguláris Frobenius-csoportként hasson.*

Megoldás: Tegyük fel, hogy G Frobenius-féle permutációcsoport, és egy $\omega \in \Omega$ elemre H az ω stabilizátora. A feltevés miatt, hogy G nem reguláris, $H \neq 1$, és a tranzitivitás miatt $H \neq G$. Továbbá minden $g \in G \setminus H$ elemre $\omega g \neq \omega$, és így $H \cap H^g = G_\omega \cap G_{\omega g} = 1$, minthogy nem triviális elemnek nem lehet egyszerre ω és ωg is fixpontja.

Most tegyük fel, hogy G absztrakt Frobenius-csoport H komplementummal. Tekintsük G hatását a jobbszorzással H jobb oldali mellékosztályain. Ha Hx fixpontja egy g elemnek, akkor $Hxg = Hx$, azaz $Hxgx^{-1} = H$, vagyis $g \in H^x$. Ha g-nek $Hx \neq Hy$ is fixpontjai, akkor $g \in H^x \cap H^y$, azaz $g^{x^{-1}} \in H \cap H^{yx^{-1}} = 1$, így $g = 1$. Ez azt jelenti, hogy semelyik nem triviális elemnek nem lehet egynél több fixpontja, és egyúttal azt is bizonyítja, hogy a csoporthatás hűséges (felhasználva, hogy $H \neq G$, tehát egy mindent fixen hagyó elemnek van két különböző fixpontja), vagyis a G homomorfizmusa a H mellékosztályain ható szimmetrikus csoportba beágyazás. Mivel $H \neq 1$, a kapott Frobenius-féle permutációcsoport nem reguláris.

7. *Bizonyítsuk be, hogy egy Frobenius-csoportban a mag és a komplementum relatív prím rendűek.*

Megoldás: Hattassuk a H komplementumot az N normálosztón a konjugálással. Ekkor a H nem triviális elemeinek nincs fixpontja $N \setminus \{1\}$-en, ugyanis ha $h^{-1}xh = x$ valamely $1 \neq h \in H$ és $1 \neq x \in N$-re, akkor $h \in H \cap H^x$, ami ellentmond annak, hogy G Frobenius-csoport. Ebből következik, hogy H minden, az $\{1\}$-től különböző orbitja N-en $|H : C_H(x)| = |H|$ elemszámú, tehát $|H|$ osztója $|N| - 1$-nek, és így $|H|$ és $|N|$ relatív prímek.

8. *Legyen $G = HN$ egy csoport, ahol $H \leq G$, $N \lhd G$ és $H \cap N = 1$. Bizonyítsuk be, hogy G akkor és csak akkor Frobenius-csoport H komplementummal és N maggal, ha minden $1 \neq x \in N$-re $C_G(x) \leq N$.*

Megoldás: $\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy egy $1 \neq x \in N$-re $C_G(x) \not\leq N$. Ekkor van olyan $g \in G \setminus N$, hogy $[x, g] = 1$. Mivel $G \setminus N = \cup_{y \in G}(H^y \setminus \{1\})$, valamely y-ra $g \in H^y$. Az x, g elempárt y^{-1}-gyel megkonjugálva azt kapjuk, hogy olyan x, g is létezik, amelyekre $g \in H$, $x \in N$, és továbbra is $[x, g] = 1$. Ekkor viszont $1 \neq g \in H^x \cap H$, miközben $x \notin H$, ellentmondva a Frobenius-csoport definíciójának.

$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy valamely $y \notin H$-ra $1 \neq h \in H \cap H^y$. A $G = HN$ feltevés miatt $y = gx$ alakú, ahol $g \in H$ és $x \in N$, és erre $H^y = H^{gx} = H^x$. Tehát $h = x^{-1}h'x$ valamely $h' \in H$-ra, amiből $[h', x] = (h')^{-1}x^{-1}h'x = (h')^{-1}h \in H \cap N = 1$, vagyis $h' \in C_G(x) \setminus N$, ellentmondva a feltevésnek.

9. *Bizonyítsuk be, hogy egy Frobenius-csoportnak minden normálosztója vagy benne van a magban, vagy tartalmazza azt.*

Megoldás: Először belátjuk, hogy ha $M \lhd G$ és $M < N$, akkor $\overline{G} = G/M$ is Frobenius-csoport $\overline{N} = N/M$ maggal és $\overline{H} = HM/M$ komplementummal. Az nyilván igaz, hogy $\overline{G} = \overline{H}\,\overline{N}$ és $\overline{H} \cap \overline{N} = \overline{1}$. A 8. feladat alapján elegendő azt bizonyítani, hogy $\overline{1} \neq \overline{x} \in \overline{N}$-re $C_{\overline{G}}(\overline{x}) \leq \overline{N}$. Tegyük fel, hogy nem így van, azaz van olyan $x \in N \setminus M$ és $g \in G \setminus N$, amelyre $\overline{g^{-1}xg} = \overline{x}$. Mivel $G \setminus \overline{N} = \cup_{y \in G} H^y$, feltehetjük, $g \in H$. Tehát a g-vel való konjugálás helybenhagyja az Mx mellékosztályt. g-nek egy alkalmas p prím rendű hatványa, g', szintén permutálja Mx elemeit. $(|H|, |N|) = 1$ miatt (ld. a 7. feladatot) p nem osztója $|M|$-nek, és így $|Mx|$-nek sem, tehát g'-nek van Mx-ben egy x' fixpontja. Ez azt jelenti, hogy $g' \in C_G(x') \setminus N$, és $1 \neq x' \in N$, ami a 8. feladat szerint ellentmond annak, hogy G Frobenius-csoport.

Legyen M egy tetszőleges valódi normálosztó G-ben. Ha $N \cap M = 1$, akkor $M \leq C_G(N)$, ami a 8. feladat szerint nem lehetséges. Ha pedig $M \cap N > 1$, akkor vagy tartalmazza egyik a másikat, vagy az előző bekezdés szerint $G/(M \cap N)$ Frobenius csoport, és tartalmaz egy a Frobenius-magtól diszjunkt normálosztót, ez pedig az előző észrevétel szerint ellentmondás.

10. *Legyen χ a G csoport egy karaktere. Definiáljuk a $\det \chi : G \to \mathbb{C}^\times$ leképezést a $(\det \chi)(g) = \det X(g)$ összefüggéssel, ahol χ az X reprezentáció karaktere. Bizonyítsuk be, hogy $\det \chi$ jól definiált lineáris karakter.*

Megoldás: Ha X és Y ugyanazt a χ karaktert adják, akkor ekvivalensek, azaz $Y(g) = P^{-1}X(g)P$ valamely P-re, és $\det P^{-1}X(g)P = \det X(g)$. $\det X$ valóban reprezentáció, mert $\det X(gh) = \det X(g)X(h) = \det X(g) \cdot \det X(h)$, és mivel $\mathbb{C}^\times$-ba képez, $\det \chi$ lineáris.

11. *Bizonyítsuk be, hogy egyszerű csoportnak nem lehet másodfokú irreducibilis karaktere. (Használjuk az előző feladatot!)*

Megoldás: Tegyük fel, hogy $\chi \in \operatorname{Irr} G$, és $\chi(1) = 2$. Mivel $\chi(1) \mid |G|$, G páros rendű, és így van másodrendű g eleme. $X(g) \sim \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}$, ahol $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ második egységgyökök, tehát vagy $\chi(g) = \pm 2$, és akkor $Z(\chi) > 1$, ami ellentmond G egyszerűségének, vagy $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = \{1, -1\}$, és akkor $\det \chi$ nem triviális lineáris karakter, így $G' < G$, és ez megint ellentmond annak, hogy G (nem Abel) egyszerű csoport.

Hf1. *Számítsuk ki S_5 egyik negyedfokú irreducibilis karakterének indukáltját S_6-ra (S_5-öt mint 6 stabilizátorát véve).*

Hf2. *Bizonyítsuk be, hogy ha $H \leq G$, és φ osztályfüggvény H-n, akkor $Z(\varphi^G) \leq H$.*