1. *Tegyük fel, hogy G-nek van olyan hűséges komplex reprezentációja, amelynek foka kisebb a $|G|$ legkisebb prímosztójánál. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G Abel-csoport.*

Megoldás: χ felírható irreducibilis karakterek összegeként, amelyeknek foka osztója $|G|$-nek, így a feltétel miatt csak lineárisak lehetnek: $\chi = \sum \lambda_i$. De $1 = \operatorname{Ker}\chi \geq \bigcap \operatorname{Ker}\lambda_i \geq G'$, így $G' = 1$, azaz G Abel.

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha $K, H \leq G$, $\psi \in \operatorname{Irr} H$, és $(\psi^G)_K$ irreducibilis, akkor $G = HK$. (Útmutatás: Lássuk be, hogy $[(\psi^G)_K, (\psi_{H\cap K})^K] \neq 0$.)*

Megoldás: $[(\psi^G)_K, (\psi_{H\cap K})^K] = [((\psi^G)_K)_{H\cap K}, \psi_{H\cap K}] = [(\psi^G)_{H\cap K}, \psi_{H\cap K}] = [((\psi^G)_H)_{H\cap K}, \psi_{H\cap K}] \neq 0$, mert $[(\psi^G)_H, \psi] = [\psi, \psi] \neq 0$ és $\psi \in \operatorname{Irr} H$ miatt ψ direkt összeadandója $(\psi^G)_H$-nak, és így a $H \cap K$-ra való megszorítottjaikra is igaz ez. Mivel $(\psi^G)_K$ irreducibilis, ebből következik, hogy $(\psi^G)_K$ direkt összeadandója $(\psi_{H\cap K})^K$-nak, és így $|G : H|\psi(1) = \psi^G(1) = (\psi^G)_K(1) \leq (\psi_{H\cap K})^K(1) = |K : (H \cap K)|\psi(1)$, amiből $|G| \leq |H||K|/|H \cap K| = |HK|$, tehát $G = HK$.

3. *Legyen G egyszerű, $\chi \in \operatorname{Irr} G$, $\chi(1) = p$ prím. Bizonyítsuk be, hogy G p-Sylowja p elemű. (Útmutatás: Ha a p-Sylow nem Abel, akkor $Z(P) \leq Z(\chi)$.)*

Megoldás: A $\chi(1) = p$ feltevés miatt $|G|$ osztható p-vel, tehát G-nek nem triviális p-Sylowja van, legyen ez P. Ha χ_P irreducibilis, akkor $1 \neq Z(P) \leq Z(\chi_P) \leq Z(\chi)$, de az utóbbi G egyszerűsége miatt triviális, ez ellentmondás.

Tehát χ_P nem irreducibilis, és így minden irreducibilis komponensének foka p-nél kisebb, másrészt osztója $|P|$-nek, tehát csak 1 lehet. Viszont G egyszerűsége miatt χ hűséges, tehát ha χ_P minden komponense lineáris, akkor P-nek Abel-csoportnak kell lennie.

Minden $1 \neq x \in P$-re $C_G(x) \geq P$ miatt $p \nmid |\mathcal{K}(x)|$ és $Z(\chi) = 1$, így a Burnside-tétel miatt $\chi(x) = 0$. Ezért $\chi_P = a \cdot \rho = a \cdot \sum_{\varphi_i \in \operatorname{Irr} P} \varphi_i$ valamely $a > 0$-ra, így $[\chi_P, \varphi_i] = a \neq 0$ minden i-re, tehát $\chi_P(1) = a \cdot |\operatorname{Irr} P| \geq |\operatorname{Irr} P|$. Viszont $\chi_P(1) = p$, ezért $p \geq |\operatorname{Irr} P| = |P|$, következésképpen $|P| = p$.

4. *Bizonyítsuk be, hogy ha G valamely automorfizmusa minden karaktert helyben hagy, akkor minden konjugáltosztályt is helyben hagy.*

Megoldás: Legyen $\mathcal{K}$ egy konjugáltosztály, és tegyük fel, hogy a σ automorfizmus minden karaktert helyben hagy. Ekkor $g \in \mathcal{K}$, $\chi \in \operatorname{Irr} G$-re $\chi(g) = \chi^\sigma(g^\sigma) = \chi(g^\sigma)$, tehát $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}^\sigma$ oszlopa megegyezik a karaktertáblában. Az ortogonalitási relációk miatt ebből következik, hogy $\mathcal{K} = \mathcal{K}^\sigma$.

5. *Legyen G egy Frobenius-csoport, N maggal és H komplementummal. Bizonyítsuk be az alábbi állításokat.*

a) Minden $1 \neq x \in N$-re $C_G(x) \leq N$.

b) Tetszőleges $1 \neq h \in H$-ra a h-val való konjugálás nem hagyja helyben N semelyik nem triviális konjugáltosztályát.

c) Tetszőleges $1 \neq h \in H$-ra a h-val való konjugálás nem hagyja helyben N semelyik nem triviális irreducibilis karakterét.

d) Minden $1_N \neq \varphi \in \operatorname{Irr}(N)$-re $\varphi^G \in \operatorname{Irr} G$.

Megoldás: a) Tegyük fel, hogy van olyan $g \in G \setminus N$, amelyre $[x, g] = 1$. Ekkor $g = h^y$ valamely $1 \neq h \in H$-ra és $y \in G$-re. Így $[x, h^y] = 1$, ebből $[x^{y^{-1}}, h] = 1$, tehát $z = x^{y^{-1}}$-re $h^z = h \Rightarrow H \cap H^z \neq 1 \Rightarrow z \in H \cap N = 1 \Rightarrow x = 1$, ami ellentmond a feltevésnek.

b) Ha $x^h = x^y$ valamely $1 \neq x \in N$, $y \in N$, $1 \neq h \in H$-ra, akkor $x^{hy^{-1}} = x$, ezért $hy^{-1} \in C_G(x) \leq N$, és $y \in N$, tehát $h \in N \cap H = 1$, ellentmondás.

c) A konjugáltosztályok permutálása oszlopművelet, a karaktereké sorművelet a C karaktertáblán mint $k \times k$-as mátrixon, és erre $PC = CQ$, alkalmas P és Q permutációs mátrixra, ahol $\operatorname{tr} Q = 1$, mert az első konjugáltosztály helyben marad, a többi mind más konjugáltosztályba képződik. Az ortogonalitási relációk miatt C invertálható, és $C^{-1}PC = Q$, így $\operatorname{tr} P = \operatorname{tr} Q = 1$. De P is permutációs mátrix, és az átlójának első eleme 1 (a triviális karaktert helyben hagyja a konjugálás), így a többinek 0-nak kell lennie.

d) $[(\varphi^G)_N, \varphi] = [\varphi^G, \varphi^G] \neq 0$, így a Clifford-tétel szerint $(\varphi^G)_N = e \cdot \sum \varphi_i$, ahol φ_i-k a φ konjugáltjai, és $e = [(\varphi^G)_N, \varphi]$. Mivel H fixpontmentesen hat a konjugálással N nem triviális irreducibilis karakterein, az utóbbiaknak minden H szerinti orbitjában $|H|$ karakter van. Ráadásul N helyben hagyja a karaktereket, így a $G = NH$ szerinti konjugáltak a H szerinti konjugáltak, azaz φ-nek G-re nézve $|H|$ konjugáltja van. Ebből $(\varphi^G)_N(1) = e\,|H|\,\varphi(1)$, másrészt $(\varphi^G)_N(1) = \varphi^G(1) = |G : N|\varphi(1) = |H|\,\varphi(1)$, tehát $e = 1$, amiből $[\varphi^G, \varphi^G] = 1$.

Hf1. *a) Bizonyítsuk be, hogy ha A Abel-csoport és χ karaktere A-nak, akkor $[\chi, \chi] \geq \chi(1)$.*
b) Legyen $A \leq G$, A Abel-csoport, $\chi \in \operatorname{Irr} G$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(1) \leq |G : A|$.

Hf2. *Tegyük fel, hogy $A \leq G$ Abel részcsoport, és $|G : A|$ prímhatvány. Bizonyítsuk be, hogy $G' < G$.*

Hf3. *Tegyük fel, hogy G-nek egyetlen nem lineáris irreducibilis karaktere van. Bizonyítsuk be, hogy G' Abel. (Útmutatás: Számítsuk ki a G reguláris karakterének megszorítását G'-re kétféleképpen.)*