

1. Legyen $M \in \text{Mod-}R$, azaz M jobb oldali R -modulus, B balideálja, J jobbideálja R -nek, $a \in M$ és U, V részmodulusok M -ben. Az alábbiak közül melyiknek lesznek feltétlenül részmodulusai M -nek? (Az összegek komplexusösszegeket, a szorzatok a komplexusszorzat elemeiből alkotott összegek hamazát jelentik, Ann pedig az adott jobb-, illetve balmodulust 0-ba szorzó R -beli elemek halmaza.)

- a) aR b) aB c) aJ d) $U \cap V$ e) $U \cup V$
 f) $U + V$ g) $\text{Ann}_M(B)$ h) $\text{Ann}_M(J)$ i) UB j) UJ .

2. Mi lehet a \mathbb{Z} , \mathbb{Z}_3 , illetve \mathbb{Z}_6 gyűrűk fölötti (unitér) modulusok additív csoportja? Izomorfia erejéig hány 15 elemű modulus van az egyes gyűrűk fölött?
3. Legyen $V = \mathbb{R}^n$ az \mathbb{R} fölötti n -dimenziós vektortér. Keressünk alkalmas S részgyűrűt az $n \times n$ -es valós mátrixok gyűrűjében, hogy a szokásos mátrix-vektor szorzásra nézve V egyetlen nemtriviális S -részmodulusa
- a) $U = \{(x_1, \dots, x_n) \in V \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$, illetve
 b) $U = \{(x, \dots, x) \in V \mid x \in \mathbb{R}\}$ legyen.
4. Legyen $N \leq M \in \text{Mod-}R$. Bizonyítsuk be, hogy létezik M -ben egy maximális U részmodulus, amelyre $N \cap U = 0$, és hogy ekkor M minden nem triviális részmodulusa nemtriviálisan metszi az $N \oplus U$ modulust. Mutassunk példát az Abelcsoportok között arra, hogy $N \oplus U$ nem feltétlenül az egész M .
5. Az alább felsorolt modulusosztályok közül melyikekben bontható minden modulus ciklikusok, illetve egyszerűek direkt összegére? Ha az egész osztályra nem igaz, milyen részosztályra teljesül a felbonthatóság?
- a) vektorterek
 b) ferdetest fölötti modulusok
 c) véges Abel-csoportok
 d) Abel-csoportok
 e) \mathbb{Z}_n fölötti modulusok
 f) $K[x]$ fölötti modulusok, ahol K test

Hf1. Legyenek A, B és C részmodulusok az M modulusban, és tegyük föl, hogy $A \geq C$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A \cap (B + C) = (A \cap B) + C$.

Hf2. Legyen

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{és} \quad R = \left\{ \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy M jobbmodulus R fölött (a természetes mátrixszorzással), és hogy M -nek egyetlen valódi részmodulusa van.

Hf3. Legyen M jobb R -modulus. Bizonyítsuk be, hogy M annullátora R -ben, azaz $\text{Ann}_R(M) = \{r \in R \mid mr = 0 \forall m \in M\}$ kétoldali ideálja R -nek.