Gyűrűk és csop. repr. **2. feladatsor** *2013. február 19.*

1. Bizonyítsuk be, hogy a kategóriaelméleti szorzat és koszorzat izomorfizmus erejéig egyértelmű!

M szorzat:
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi_i"] & M_i \\ \forall U \arrow[u, dashed, "\exists!\varphi"] \arrow[ur, "\alpha_i"'] & \end{tikzcd}$$

N koszorzat:
$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"'] & M_i \arrow[l, "\iota_i"'] \arrow[dl, "\alpha_i"] \\ \forall U & \end{tikzcd}$$

2. Mi a $\mathbb{Z}$ önmagával vett koszorzata, ha az Abel-csoportok, illetve a csoportok kategóriájában nézzük? És $\mathbb{Z}_2$ önmagával vett koszorzata?

3*. Bizonyítsuk be, hogy szabad Abel-csoport minden részcsoportja szabad! (Útmutatás: Legyen $G = \bigoplus_{\alpha<\kappa} \langle g_\alpha \rangle$, ahol κ számosság, és $G_\alpha = \bigoplus_{\beta<\alpha} \langle g_\beta \rangle$ minden $\alpha < \kappa$ rendszámra. A $H \leq G$ részcsoportra definiáljuk a $H_\alpha = H \cap G_\alpha$ részcsoportokat, és lássuk be, hogy $H_{\alpha+1} \cong H_\alpha \oplus \mathbb{Z}$ vagy H_α minden α-ra.)

4. Bizonyítsuk be, hogy projektív modulusok direkt összege projektív, és injektív modulusok direkt szorzata injektív!

5. Bizonyítsuk be, hogy minden vektortér projektív és injektív!

6. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\mathbb{Q}$ nem projektív;

b*) $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ nem projektív! (Útmutatás: Álljon a H részcsoport azokból az elemekből, amelyekre igaz, hogy tetszőleges n-re a komponensek véges sok kivétellel oszthatók 2^n-nel. Bizonyítsuk be, hogy H nem szabad.)

7. Egy M_R modulusban $\{(x_i, f_i) \mid i \in I\}$ *duális bázis*, ha $x_i \in M$, $f_i \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$ minden i-re, és

(1) minden $x \in M$-re $xf_i = 0$ teljesül véges sok index kivételével;

(2) minden $x \in M$-re $x = \sum_{i\in I} x_i(xf_i)$.

Bizonyítsuk be, hogy M akkor és csak akkor projektív, ha van duális bázisa!

8. Tegyük fel, hogy G osztható Abel-csoport.

a) Bizonyítsuk be, hogy ha $g \in G$, akkor $o(g) = \infty$ esetén g belefoglalható G egy olyan direkt komponensébe, amely $\mathbb{Q}$-val izomorf, ha pedig $o(g) = p^n$ valamely p prímre és $n \geq 1$-re, akkor g beágyazható G egy $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-nel izomorf direkt komponensébe.

b) Bizonyítsuk be, hogy a G csoport $\mathbb{Q}$-knak és $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-eknek direkt összege.

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy egy P modulus akkor és csak akkor projektív, ha van olyan szabad F modulus, melyre $F \cong F \oplus P$.

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}_n$ injektív mint önmaga fölötti modulus (használhatjuk a Baer-kritériumot)!