1. Legyenek ${}_S X_R$ és ${}_T Y_R$ bimodulusok. Lássuk be, hogy $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ egy $T-S$-bimodulus!

2. Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{Hom}_R(\oplus M_i, N) \cong \prod \mathrm{Hom}_R(M_i, N)$.

3. Bizonyítsuk be hogy $\mathrm{End}(R_R) \cong R$, ha az endomorfizmusokat balról írjuk!

4. Bizonyítsuk be, hogy ha A véges dimenziós K-algebra, és $M \in \text{mod-}A$, akkor $D^2(M) \cong M$, ahol egy $X \in \text{mod-}A$ (vagy $X \in A\text{-mod}$) modulusra $D(X) = \mathrm{Hom}_K(X,K) \in A\text{-mod}$ (illetve $\in \text{mod-}A$).

5. Adjuk meg az A algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha $A = K\Gamma/I$, ahol Γ:
$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, shift left, "\alpha"] & \overset{2}{\bullet} \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[loop right, "\gamma"] \end{tikzcd}$$
és

a) $I = (\alpha\gamma, \gamma^2, \gamma\beta, \alpha\beta\alpha, \beta\alpha\beta)$;

b) $I = (\alpha\gamma^2, \gamma^2 - \beta\alpha, \alpha\beta)$.

6. Lehet-e az alábbi egy $K\Gamma/I$ algebra reguláris jobbmodulusának Loewy-diagramja? Ha igen, adjuk meg a Γ gráfot és az I ideálnak egy generátorrendszerét!

a) $\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}$ b) $\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix}$ c) $\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus 3$

7. Legyen $A = K\Gamma/I$ az az algebra, amelynek reguláris jobbmodulusa $A_A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}$. Határozzuk meg az $\begin{smallmatrix} & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & \end{smallmatrix}$ modulus összes részmodulusát és az ezekkel vett faktorainak Loewy-diagramját!

8. Hány dimenziós az 5.b) feladatban megadott A algebra fölött a $\mathrm{Hom}\left(\begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix}\right)$, illetve a $\mathrm{Hom}\left(\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix}\right)$ vektortér?

9. Bontsuk fel az $\mathbb{F}_2 D_3$ csoportalgebra jobbreguláris modulusát felbonthatatlan modulusok direkt összegére!

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$-nek mint önmaga fölötti modulusnak vannak felbonthatatlan direkt összeadandói, de nem bontható fel felbonthatatlanok direkt összegére!

Hf2. Legyen $e, f \in R$ két idempotens elem. Bizonyítsuk be, hogy az eR és fR modulusok akkor és csak akkor izomorfak, ha van olyan $x \in fRe$ és $y \in eRf$, hogy $yx = e$, és $xy = f$.

Hf1. Írjuk fel az $A = K\Gamma/I$ algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha
$$\Gamma : 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\delta}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} 3, \qquad I = (\alpha\beta, \beta\alpha - \gamma\delta, \delta\beta, \delta\gamma).$$