1. Legyenek $U \leq M$ modulusok. Bizonyítsuk be, hogy M akkor és csak akkor maximum-feltételes (illetve minimum-feltételes), ha U és M/U is ilyen tulajdonságú.

2. Bizonyítsuk be, hogy egy modulus akkor és csak akkor maximum- és minimumfeltételes, ha van véges kompozíciólánca.

3. Lássuk be, hogy egy R gyűrűben egy a elem akkor és csak akkor van benne egy nilpotens jobbideálban, ha egy nilpotens balideálban is benne van.

4. Tegyük fel, hogy egy R gyűrű jobb-Artin és jobb-Noether. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek R tetszőleges J jobbideáljára.

(i) J nilpotens;
(ii) J annullál minden egyszerű jobb R-modulust;
(iii) minden véges kompozícióláncú jobb R-modulust annullál J-nek egy alkalmas hatványa.

5. Legyenek M_i $(i \in I)$ részmodulusok M-ben. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $M/\bigcap_{i\in I} M_i$ beágyazható $\prod_{i\in I} M/M_i$-be, de nem feltétlenül ágyazható be $\bigoplus_{i\in I} M/M_i$-be.

6. Definiáljuk a $J(R)$ Jacobson-radikált úgy, mint az R maximális jobbideáljainak (azaz R_R maximális részmodulusainak) metszetét. Bizonyítsuk be, hogy ha R jobb-Artin és jobb-Noether, akkor

a) $J(R)$ a legkisebb (azaz minden más ilyenben benne levő) olyan jobbideál, hogy az R_R-nek ezzel vett faktormodulusa féligegyszerű.
b) $J(R)$ a legnagyobb (azaz minden más ilyet tartalmazó) nilpotens jobbideál.
c) $J(R)$ az egyetlen olyan jobbideál, amelyre $R_R/J(R)$ féligegyszerű és $J(R)$ nilpotens.

7. Bizonyítsuk be, hogy egy jobb-Artin és jobb-Noether gyűrű Jacobson-radikálja, $J(R)$ ideál, és ugyanezt az ideált kapjuk, ha $J(R)$-et R maximális balideáljainak metszeteként definiáljuk.

Egy X részmodulus kicsi M-ben ($X << M$), ha minden $Y \leq M$-re $X + Y = M$-ből következik, hogy $Y = M$.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha $Y \leq X << M$ és $Z \leq M$, akkor

a) $Y << M$;
b) $\overline{X} << M/Z$, ahol $\overline{X} = (X + Z)/Z$ az X képe a Z-vel való faktorizálásnál.

9. (Fitting-lemma) Bizonyítsuk be, hogy ha M maximum- és minimumfeltételes modulus, és $\varphi \in \mathrm{End}(M)$, akkor van olyan n, amelyre $M = \operatorname{Ker}\varphi^n \oplus \operatorname{Im}\varphi^n$.

Hf1. Legyen M maximum-feltételes modulus. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{rad} M$ a legnagyobb olyan részmodulus, amely kicsi M-ben.

Hf2. Határozzuk meg az $\mathbb{F}_3 C_3$ csoportalgebra Jacobson-radikálját!

Hf3. Bizonyítsuk be, hogy minden kommutatív nullosztómentes Artin-gyűrű test.