1. Tegyük fel, hogy $R = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$, ahol minden P_i direkt felbonthatatlan modulus. Nevezzük P_i-t és P_j-t szomszédosnak, ha $\mathrm{Hom}(P_i, P_j) \neq 0$ vagy $\mathrm{Hom}(P_j, P_i) \neq 0$, és legyenek $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_t$ az így kapott gráf összefüggő komponensei. Bizonyítsuk be, hogy $\oplus \{ P_i \mid P_i \in \mathcal{K}_j \}$ direkt felbonthatatlan ideálja R-nek minden j-re, és R ezeknek a direkt felbonthatatlan gyűrűknek a direkt összege.

2. Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{Hom}(M_A, A_A)$ bal A-modulus (másképpen jobb A^{opp}-modulus), ha a homomorfizmusokat balról írjuk, és ha M felbonthatatlan projektív mod-A-ban, akkor $\mathrm{Hom}(M_A, A_A)$ felbonthatatlan projektív A-mod-ban.

3. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathrm{Hom}(M, -)$ és $\mathrm{Hom}(-, N)$ funktorok a $\mathrm{Hom}(X, Y)$ Abel-csoporton csoporthomomorfizmusként hatnak. Speciálisan, lássuk be, hogy ha A véges dimenziós K-algebra, és a funktor a K-duális, $D = \mathrm{Hom}_K(-, K)$, akkor a $D : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(D(Y), D(X))$ leképezés injektív K-homomorfizmus, sőt izomorfizmus.

4. Lássuk be, hogy egy A véges dimenziós algebrára a K-duális egzakt sorozatot egzakt sorozatba visz, és egy ilyen sorozat akkor és csak akkor felhasadó, ha a képe az!

5. Tegyük fel, hogy A gráfalgebra $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nyilakkal, és hogy az $M \in$ mod-A modulusnak van olyan $\mathcal{B} = \{ b_1, \ldots, b_\ell \}$ bázisa, amelyre a $\mathcal{B} \cup \{ 0 \}$ halmazt minden nyíllal való jobbszorzás önmagába képezi. Jelölje továbbá minden α nyílra $b_i\alpha^{-1}$ az $\{ x \in \mathcal{B} \mid x\alpha = b_i \}$ halmazt. Bizonyítsuk be, hogy $D(M)$-nek bázisa a $\mathcal{B}' = \{ b'_1, \ldots, b'_k \}$ halmaz, ahol $b'_i : b_j \mapsto \delta_{ij}$, és $\alpha b'_i = (\sum b_i\alpha^{-1})'$.

6. Legyen $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\2\\2\end{smallmatrix}$. Határozzuk meg ${}_AA$ Loewy-diagramját, és duálisképzéssel az összes felbonthatatlan injektív jobb A-modulust. Adjuk meg az algebra Auslander–Reiten-gráfjában a projektív modulusokba menő és az injektív modulusokból kiinduló irreducibilis morfizmusokat.

7. Adjuk meg az előző feladat algebrája fölött az $M = \begin{smallmatrix} & & 1 \\ 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$ és $\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ 2 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$ modulusok K-duálisának Loewy-diagramját.

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy a $D = \mathrm{Hom}_K(-, K) :$ mod-$A \to A$-mod funktor egyszerű modulust egyszerű modulusba visz.

Hf2. Adjuk meg az $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$ algebra felbonthatatlan injektív modulusainak Loewy-diagramját.