Gyűrűk és csop. repr. **6. feladatsor** *2013. március 19.*

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0$ Auslander–Reiten-sorozat, akkor $0 < Z_1 < Z$ részmodulusra a $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Z_1\beta^{-1} \xrightarrow{\beta} Z_1 \longrightarrow 0$ sorozat felhasadó.

2. Legyen $A_A = \begin{smallmatrix}1\\3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$. Adjuk meg az egyszerű modulusok Auslander–Reiten-eltoltjait.

3. Legyen $A_A = P_1 \oplus P_2$, ahol $P_1 = \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}$ és $P_2 = \begin{smallmatrix}2\\2\\2\end{smallmatrix}$, továbbá $P_1^* = \mathrm{Hom}(P_1, A_A)$ és $P_2^* = \mathrm{Hom}(P_2, A_A)$. Rajzoljuk föl a P_1^* és P_2^* bal A-modulusok Loewy-diagramját. Ha az $\alpha : P_2 \to P_1$ homomorfizmus képe egydimenziós, akkor mi az ennek megfelelő $\alpha^* : P_1^* \to P_2^*$ homomorfizmus a Loewy-diagramokon megadva? Határozzuk meg ennek segítségével az $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ modulus AR-eltoltját.

4. Határozzuk meg az A algebra Auslander–Reiten-gráfját, ha $A_A = \begin{smallmatrix}1\\3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$.

5. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbb{Z}_3 D_3$ csoportalgebra izomorf azzal a $\mathbb{Z}_3$ fölötti gráfalgebrával, amelyre a jobb reguláris modulus Loewy-diagramja $\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix}$.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha a K test karakterisztikája p, akkor egy tetszőleges G véges p-csoport KG csoportalgebrájának Jacobson-radikálja azokból az elemekből áll, amelyekben az együtthatók összege 0. Hány nem izomorf egyszerű modulus van KG fölött?

Hf1. Legyen $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0$ egzakt sorozat. Bizonyítsuk be, hogy ha α irreducibilis, és $\mathrm{Im}\,\alpha \le Y_1 < Y$, akkor $\mathrm{Im}\,\alpha$ direkt összeadandója Y_1-nek.

Hf2. Legyen $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$. Adjuk meg a $\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}$ modulus Auslander–Reiten-eltoltját.