*Gyűrűk és csop. repr.* **2. feladatsor** *2013. február 19.*

**1.** *Bizonyítsuk be, hogy a kategóriaelméleti szorzat és koszorzat izomorfizmus erejéig egyértelmű! Lássuk be, hogy modulusok szorzata a direkt szorzatuk, koszorzata a direkt összegük!*

*M szorzat:*
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi_i"] & M_i \\ \forall U \arrow[u, dashed, "\exists!\varphi"] \arrow[ur, "\alpha_i"'] & \end{tikzcd}$$

*N koszorzat:*
$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"'] & M_i \arrow[l, "\iota_i"'] \arrow[dl, "\alpha_i"] \\ \forall U & \end{tikzcd}$$

*Megoldás:* Ha $M$ és $M'$ is szorzata az $M_i$ modulusoknak ($\pi_i$ és $\pi_i'$ morfizmusokkal), akkor a diagram szerint van $\varphi : M' \to M$ és $\psi : M \to M'$, amelyekre $\varphi\pi_i = \pi_i'$ és $\psi\pi_i' = \pi_i$ minden $i$-re. De akkor $M$-et téve $U$ helyébe is a fönti diagramban (és $\pi_i$-t $\alpha_i$ helyére), a diagramot $\psi\varphi$-vel és $id_M$-mel is kommutatívvá lehet tenni. Az egyértelműség miatt ebből $\psi\varphi = id_M$ következik, és ugyanígy jön ki, hogy $\varphi\psi = id_{M'}$, tehát $M \cong M'$. A koszorzatra ugyanez működik, csak fordított irányú morfizmusokkal.

Legyen $M = \prod\limits_{i\in I} M_i$, $\pi_i$ az $i$. komponensre való vetítés, $U$ pedig egy tetszőleges modulus, $\alpha_i : U \to M_i$ morfizmusokkal. Ekkor a $\varphi : U \to M$, $u\varphi = (\ldots, u\alpha_i, \ldots)$ leképezés modulus-homomorfizmus, és $\varphi\pi_i = \alpha_i$.

Legyen $N = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, $\iota_i$ az $M_i$-nek az $N$-be való természetes beágyazása, $U$ pedig egy tetszőleges modulus, $\alpha_i : M_i \to U$ morfizmusokkal. Ekkor a $\varphi : N \to U$, $\big(\sum\limits_{i\in I} m_i\big)\varphi = \sum\limits_{i\in I} m_i\alpha_i$ értelmes, mert az $m_i$-k közül csak véges sok nem 0, és nyilvánvalóan művelettartó, továbbá $\iota_i\varphi = \alpha_i$ minden $i$-re.

**2.** *Mi a $\mathbb{Z}$ önmagával vett koszorzata, ha az Abel-csoportok, illetve a csoportok kategóriájában nézzük? És $\mathbb{Z}_2$ önmagával vett koszorzata?*

*Megoldás:* Az Abel-csoportok kategóriájában az 1. feladat szerint $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. A csoportok kategóriájában inkább multiplikatív műveletet szoktunk használni, így $\mathbb{Z}$ helyett vegyük a $C_\infty$ csoportot. Itt a 2 elemmel generált szabadcsoport lesz a koszorzat. Legyen ugyanis az $F$ csoport az $x, y$ elemekkel szabadon generált csoport. $M_1 =< x >$, és $M_2 =< y >$ mindketten végtelen ciklikus csoportok, és a természetes beágyazásuk $F$-be a $\iota_1$ és $\iota_2$. Tetszőleges $U$ csoportra és $\alpha_i : M_i \to U$ homomorfizmusokra van olyan $\varphi : F \to U$ homomorfizmus, ami a szabad generátorokon megadott $x \mapsto x\alpha_1$ és $y \mapsto y\alpha_2$ leképezést kiterjeszti. Mivel $\iota_i\varphi = \alpha_i$ teljesül az $M_i$ generátor elemén $x$-en, illetve $y$-on, a teljes $M_i$ csoporton is teljesül $i = 1, 2$-re. Vagyis $F$ valóban a végtelen ciklikus csoport koszorzata önmagával.

$\mathbb{Z}_2$ koszorzata önmagával az Abel-csoportok kategóriájában nyilván $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, azaz a Klein-csoport, a csoportok kategóriájában pedig két másodrendű ciklikus csoport szabad szorzata, azaz az $\langle\, x, y \,|\, x^2 = y^2 = 1 \,\rangle$ definiáló relációkkal megadott csoport (mellesleg ez ugyanaz, amit a síkon egy $2\pi$-nek irracionális többszörösével való origó körüli forgatás, és egy origón átmenő egyenesre való tükrözés generál a sík egybevágóságcsoportjában).

**3***. *Bizonyítsuk be, hogy szabad Abel-csoport minden részcsoportja szabad! (Útmutatás: Legyen $G = \bigoplus\limits_{\alpha<\kappa} \langle g_\alpha\rangle$, ahol $\kappa$ számosság, és $G_\alpha = \bigoplus\limits_{\beta<\alpha} \langle g_\beta\rangle$ minden $\alpha < \kappa$ rendszámra. A $H \leq G$*

*részcsoportra definiáljuk a $H_\alpha = H \cap G_\alpha$ részcsoportokat, és lássuk be, hogy $H_{\alpha+1} \cong H_\alpha \oplus \mathbb{Z}$ vagy $H_\alpha$ minden $\alpha$-ra.)*

*Megoldás:* Használjuk az útmutatás definícióit és jelöléseit. Ezek alapján minden $\lambda \le \kappa$ rendszámra $G_\lambda = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} G_{\alpha+1}$, és így $H_\lambda = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} H_{\alpha+1}$.

Legyen $\pi$ a $G_{\alpha+1} = G_\alpha \oplus \langle g_\alpha \rangle$ csoporton a második komponensre való vetítésének a $H_{\alpha+1}$-re való megszorítása. Ekkor $\operatorname{Im}\pi \le \langle g_\alpha \rangle \cong \mathbb{Z}$, így $\operatorname{Im}\pi$ vagy 0, amely esetben $H_{\alpha+1} = H_\alpha$, vagy $\operatorname{Im}\pi \cong \mathbb{Z}$ projektív, ezért ekkor $\operatorname{Ker}\pi = H_\alpha$ direkt összeadandó $H_{\alpha+1}$-ben, és a faktora izomorf $\mathbb{Z}$-vel. Így $H_{\alpha+1} = H_\alpha \oplus B_{\alpha+1}$, ahol $B_{\alpha+1}$ vagy 0, vagy $\mathbb{Z}$-vel izomorf. Legyen $B = \sum\limits_{\alpha<\kappa} B_{\alpha+1}$.

Belátjuk, hogy $H = B = \bigoplus\limits_{\alpha<\kappa} B_{\alpha+1}$. Először is a $B_{\alpha+1}$ részcsoportok függetlenek, mert ha nem azok lennének, akkor valamelyik $\alpha$-ra létezne $0 \ne b \in B_{\alpha+1} \cap \sum\limits_{\gamma<\alpha} B_{\gamma+1} \le B_{\alpha+1} \cap H_\alpha = 0$, ami ellentmondás. Másrészt $B = H$, ugyanis különben lenne olyan legkisebb $\alpha$, amelyre valamely $h \in H_{\alpha+1}$ nincs $B$-ben. Írjuk fel $h$-t a $H_{\alpha+1} = H_\alpha \oplus B_{\alpha+1}$ felbontás szerint $h = h' + b$ alakban. Mivel $H_\alpha = \bigcup\limits_{\gamma<\alpha} H_{\gamma+1}$, van olyan $\gamma < \alpha$, amelyre $h' \in H_{\gamma+1}$, tehát az $\alpha$ minimalitása miatt $h' \in B$, és így $h = h' + b \in B$ ellentmond a feltevésnek.

Azt kaptuk, hogy $H$ végtelen ciklikus csoportoknak és triviális csoportoknak a direkt összege, de ebből a triviális csoportok kihagyhatók, és $H$-ról beláttuk, hogy szabad Abel-csoport.

**4.** *Bizonyítsuk be, hogy projektív modulusok direkt összege projektív, és injektív modulusok direkt szorzata injektív!*

*Megoldás:* Legyenek $M_i$-k projektívek, $\alpha : X \to Y$ szürjektív, és $\beta : \oplus M_i \to Y$. Ekkor $M_i$ projektivitásából következik, hogy van olyan $\psi_i : M_i \to X$, amelyre $\psi_i\alpha = \iota_i\beta$ minden $i$-re. Ekkor viszont a koszorzat definíciója miatt van olyan $\varepsilon : \oplus M_i \to X$, amelyre $\psi_i = \iota_i\varepsilon$ minden $i$-re. Következésképpen $\iota_i\beta = \psi_i\alpha = \iota_i\varepsilon\alpha$, tehát $\beta = \varepsilon\alpha$ a $\oplus M_i$ minden komponensén, és így $\oplus M_i$-n is.

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[d, "\iota_i"] \arrow[ddl, dashed, "\psi_i"'] \\ & \oplus M_i \arrow[d, "\beta"] \arrow[dl, dashed, "\varepsilon"] \\ X \arrow[r, two heads, "\alpha"'] & Y \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & Y \arrow[dl, dashed, "\varepsilon"'] \arrow[ddl, dashed, "\psi_i"] \\ \prod M_i \arrow[d, "\pi_i"'] & \\ M_i & \end{tikzcd}$$

Most legyenek $M_i$-k injektív modulusok, $\alpha : X \to Y$ injektív homomorfizmus, és $\beta : X \to \prod M_i$. Ekkor az $M_i$ injektivitása miatt van olyan $\psi_i : Y \to M_i$ homomorfizmus minden $i$-re, amelyre $\alpha\psi_i = \beta\pi_i$. Most a kategóriaelméleti szorzat definíciójából következik, hogy van olyan $\varepsilon : Y \to \prod M_i$, amelyre $\varepsilon\pi_i = \psi_i$ minden $i$-re. Következésképpen $\alpha\varepsilon\pi_i = \alpha\psi_i = \beta\pi_i$ minden $i$-re. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $x \in X$-re $x\alpha\varepsilon$ és $x\beta$ minden komponense megegyezik, azaz $\alpha\varepsilon = \beta$.

**5.** *Bizonyítsuk be, hogy minden vektortér projektív és injektív!*

*Megoldás:* A vektorterekre teljesül, hogy minden altérnek van direkt kiegészítője (a vektorterek féligegyszerűek). A $P$ projektív modulusoknak abból a jellemzéséből, hogy minden $M \to P$ epimorfizmus magja direkt összeadandó, következik, hogy minden vektortér projektív, és a $Q$ injektív modulusoknak abból a jellemzéséből, hogy minden $Q \to M$ monomorfizmus képe direkt összeadandó, következik, hogy minden vektortér injektív. Sőt általánosabban beláttuk, hogy féligegyszerű gyűrű fölött minden modulus projektív és injektív.

**6.** *Bizonyítsuk be, hogy*

*a)* $\mathbb{Q}$ *mint Abel-csoport nem projektív;*

*b*)* $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ *nem projektív! (Útmutatás: Álljon a $H$ részcsoport azokból az elemekből, amelyekre igaz, hogy tetszőleges $n$-re a komponensek véges sok kivétellel oszthatók $2^n$-nel. Bizonyítsuk be, hogy $H$ nem szabad.)*

*Megoldás:* a) Projektív Abel-csoportnak, azaz $\mathbb{Z}$-k direkt összegének semelyik nem nulla eleme nem korlátlanul osztható, mert $\mathbb{Z}$-ben $0 \neq n$ nem osztható $2n$-nel. $\mathbb{Q}$ viszont osztható csoport.

b) Tegyük fel, hogy a $G = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ csoport projektív, és így szabadnak direkt összeadandója, tehát a 3. feladat szerint maga is szabad. Ekkor $G$ bármely részcsoportja is szabad, így az útmutatásban szereplő $H$ részcsoport is az. $H$ nyilván tartalmazza a $\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ részcsoportot, továbbá minden olyan elemet is, amelynek az $n$. komponense vagy 0, vagy $2^n$ minden $n$-re. Ez utóbbiból kontinuum sok van, így $H$ csak kontinuum sok $\mathbb{Z}$ direkt összege lehet. Viszont akkor $H/2H$ kontinuum dimenziós $\mathbb{F}_2$ fölötti vektortér volna. De $2H + \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z} = H$ (egy $H$-beli $h$ elemből kivonhatjuk azt a direkt összegbelit, amelyben $h$ — véges sok — páratlan komponense szerepel, és a többi helyen 0, és így egy $2H$-belit kapunk), tehát $|H/2H| \leq \big|\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}\big|$, és az utóbbi megszámlálható. Ellentmondásra jutottunk a feltevésből, hogy $G$ projektív.

**7.** *Egy $M_R$ modulusban $\{(x_i, f_i) \mid i \in I\}$ duális bázis, ha $x_i \in M$, $f_i \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$ minden $i$-re, és*

*(1) minden $x \in M$-re $xf_i = 0$ teljesül véges sok index kivételével;*

*(2) minden $x \in M$-re $x = \sum\limits_{i\in I} x_i(xf_i)$.*

*Bizonyítsuk be, hogy $M$ akkor és csak akkor projektív, ha van duális bázisa!*

*Megoldás:* Először tegyük fel, hogy $M$ projektív. Ekkor $M$ direkt összeadandója egy $F = \bigoplus\limits_{i\in I} R$ szabad modulusnak. Legyen $\pi$ az $F$-nek az $M$-re való vetítése, és $e_i \in F$ az az elem, amelynek $i$. komponense 1, a többi 0. Belátjuk, hogy $(e_i\pi, \pi_i)$ duális bázis, ahol $\pi_i$ a $\bigoplus\limits_{i\in I} R$ modulus $i$. komponensre való vetítésének az $M$-re való megszorítása. Az (1) tulajdonság nyilvánvaló a direkt összeg definíciójából. Másrészt tetszőleges $m = (\ldots, r_i, \ldots)$-re $\sum\limits_{i\in I}(e_i\pi)(m\pi_i) = \sum\limits_{i\in I}(e_i\pi)(r_i) = \big(\sum\limits_{i\in I} e_i r_i\big)\pi = (\ldots, r_i, \ldots)\pi = m\pi = m$.

Fordítva, tegyük fel, hogy $M$-nek van $\{(x_i, f_i) \mid i \in I\}$ duális bázisa. Belátjuk, hogy $M$ projektív. Legyen $\alpha : U \to V$ epimorfizmus, továbbá legyen $\beta : M \to Y$. Minden

$i \in I$-hez van $u_i \in U$, hogy $x_i\beta = u_i\alpha$. Legyen $\gamma : M \to U$, $x\gamma = \sum_{i\in I} u_i(xf_i)$. Ez értelmes, mert csak véges sok $xf_i$ nem nulla, és műveletttartó, mert minden $f_i$ modulushomomorfizmus. Továbbá $x\gamma\alpha = \big(\sum_{i\in I} u_i(xf_i)\big)\alpha = \sum_{i\in I}(u_i(xf_i))\alpha = \sum_{i\in I}(u_i\alpha)(xf_i) = \sum_{i\in I}(x_i\beta)(xf_i) = \big(\sum_{i\in I} x_i(xf_i)\big)\beta = x\beta$ minden $x \in M$-re.

**8.** *Tegyük fel, hogy $G$ osztható Abel-csoport.*

*a) Bizonyítsuk be, hogy ha $g \in G$, akkor $o(g) = \infty$ esetén $g$ belefoglalható $G$ egy olyan direkt komponensébe, amely $\mathbb{Q}$-val izomorf, ha pedig $o(g) = p^n$ valamely $p$ prímre és $n \geq 1$-re, akkor $g$ beágyazható $G$ egy $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-nel izomorf direkt komponensébe.*

*b) Bizonyítsuk be, hogy a $G$ csoport $\mathbb{Q}$-knak és $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-eknek direkt összege.*

*Megoldás:* a) Legyen $I = \mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}_\infty$ a két esetben. A $H = \langle g \rangle$ csoportot ágyazzuk bele $I$-be $\alpha$-val, $G$-be pedig a természetes beágyazással, $\iota$-val. Ekkor $G$ injektivitása miatt $\iota$ átvezethető $\alpha : H \to I$-n: $\iota = \alpha\gamma$ és $\operatorname{Im}\alpha$ lényeges részmodulusa $I$-nek, azaz minden nem nulla részcsoport nem triviálisan metszi $\operatorname{Im}\alpha$-t. Így minden $0 = \operatorname{Ker}\iota = (\operatorname{Ker}\gamma \cap \operatorname{Im}\alpha)\alpha^{-1}$ miatt $\operatorname{Ker}\gamma = 0$, azaz $\gamma$ is injektív. Viszont $I$ injektivitása miatt ez azt jelenti, hogy $\operatorname{Im}\gamma \cong I$ direkt összeadandója $G$-nek.

b) Legyen $G$ injektív Abel-csoport, és indexeljük meg benne az összes $\mathbb{Q}$-val vagy valamilyen $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-vel izomorf részcsoportot. A Zorn-lemma miatt létezik olyan maximális indexhalmaz, amely független csoportokhoz tartozik, azaz amelyre a megjelölt csoportok generátuma azok direkt összege. Legyen $H$ ez a generált részcsoport. Mivel osztható csoportok direkt összege is osztható, $H$ is osztható, így injektív is. De akkor $H$ direkt összeadandó $G$-ben, és a kiegészítője, $K$ is szükségképpen injektív. Ha $K \neq 0$, akkor az a) rész miatt van benne $\mathbb{Q}$-val vagy $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-nel izomorf részcsoport, és azt hozzárakhatnánk $H$-hoz. Ez ellentmondana a maximalitásnak.

**Hf1.** *Bizonyítsuk be, hogy egy $P$ modulus akkor és csak akkor projektív, ha van olyan szabad $F$ modulus, melyre $F \cong F \oplus P$.*

**Hf2.** *Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}_n$ injektív mint önmaga fölötti modulus (használhatjuk a Baer-kritériumot)!*