Gyűrűk és csop. repr. **3. feladatsor** *2013. február 26.*

1. *Legyenek $_SX_R$ és $_TY_R$ bimodulusok. Lássuk be, hogy* $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ *egy* $T-S$*-bimodulus!*

Megoldás: Legyenek $\varphi,\psi \in \mathrm{Hom}_R(X,Y)$. Definiáljuk az S-szorzást az $x(\varphi s) := (sx)\varphi$, a T-szorzást pedig az $y(t\varphi) := t(y\varphi)$ szabállyal. A φs és $t\varphi$ leképezések is R-homomorfizmusok:

$$(x+x')(\varphi s) = (s(x+x'))\varphi = (sx+sx')\varphi = (sx)\varphi + (sx')\varphi = x(\varphi s) + x'(\varphi s),$$

$$(xr)(\varphi s) = (s(xr))\varphi = ((sx)r)\varphi = ((sx)\varphi)r = (x(\varphi s))r,$$

$$(x+x')(t\varphi) = t((x+x')\varphi) = t(x\varphi + x'\varphi) = t(x\varphi) + t(x'\varphi) = x(t\varphi) + x'(t\varphi),$$

$$(xr)(t\varphi) = t((xr)\varphi) = t((x\varphi)r) = (t(x\varphi))r = (x(t\varphi))r.$$

Belátjuk még, hogy ezzel a definícióval az $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ $T-S$-bimodulus. Az összeadással kapcsolatos axiómák teljesülése nyilvánvaló, mert a definícióban minden felcserélhető az összeadással, itt már csak a szorzásról szólókat ellenőrizzük.

$$x(\varphi(ss')) = ((ss')x)\varphi = (s(s'x))\varphi = (s'x)(\varphi s) = x((\varphi s)s'),$$

$$x((tt')\varphi) = (tt')(x\varphi) = t(t'(x\varphi)) = t(x(t'\varphi)) = x(t(t'\varphi)),$$

$$x(t(\varphi s)) = t(x(\varphi s)) = t((sx)\varphi) = (sx)(t\varphi) = x((t\varphi)s)).$$

2. *Bizonyítsuk be, hogy* $\mathrm{Hom}_R(\oplus M_i, N) \cong \prod \mathrm{Hom}_R(M_i,N)$.

Megoldás: Legyen ι_i az M_i természetes beágyazása $\oplus M_i$-be. Ekkor a ι_i-vel való balszorzás homomorfizmus $\mathrm{Hom}_R(\oplus M_i,N)$-ből $\mathrm{Hom}_R(M_i,N)$-be minden i-re. A modulusok szorzatának definíciója szerint van olyan $\Phi : \mathrm{Hom}_R(\oplus M_i,N) \to \prod \mathrm{Hom}_R(M_i,N)$, hogy minden $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(\oplus M_i,N)$-re $\varphi\Phi = (\ldots,\iota_i\varphi,\ldots)$ (ld. az első ábrát). Ez a homomorfizmus szürjektív, ugyanis tetszőleges $(\ldots,\varphi_i,\ldots) \in \prod \mathrm{Hom}_R(M_i,N)$-re a koszorzat definíciója szerint (ld. a 2. ábrát) van olyan $\varepsilon : \oplus M_i \to N$, amelyre $\varphi_i = \iota_i\varepsilon$ minden i-re, azaz $(\ldots,\varphi_i,\ldots) = (\ldots,\iota_i\varepsilon,\ldots) = \varepsilon\Phi$. Másrészt Φ injektív is, mert ha valamely $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(\oplus M_i,N)$-re $\varphi\Phi = 0$, akkor $\iota_i\varphi = 0$ minden i-re, vagyis $\varphi = 0$ a $\oplus M_i$ mindegyik komponensén, és így az egész direkt összegen is. Tehát a megadott Φ leképezés izomorfizmus.

$$\begin{tikzcd}
\prod \mathrm{Hom}_R(M_i,N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M_i,N) \\
\mathrm{Hom}_R(\oplus M_i,N) \arrow[u, dashed, "\Phi"] \arrow[ur, "\iota_i\cdot"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\oplus M_i \arrow[d, dashed, "\varepsilon"'] & M_i \arrow[l, "\iota_i"'] \arrow[dl, "\varphi_i"] \\
N &
\end{tikzcd}$$

3. *Bizonyítsuk be hogy* $\mathrm{End}(R_R) \cong R$, *ha az endomorfizmusokat balról írjuk!*

Megoldás: Definiáljuk minden $r \in R$-re a $\varphi_r \in \mathrm{End}(R_R)$ endomorfizmust az r-rel való balszorzásként. Ez valóban jobbmodulus-homomorfizmus:

$$\varphi_r(x+y) = r(x+y) = rx + ry = \varphi_r x + \varphi_r y,$$

$$\varphi_r(xs) = r(xs) = (rx)s = (\varphi_r x) \cdot s.$$

Továbbá az $\varepsilon : R \to \mathrm{End}(R_R)$, $r \mapsto \varphi_r$ leképezés gyűrűhomomorfizmus, ugyanis

$$\varphi_{r+s}x = (r+s)x = rx + sx = \varphi_r x + \varphi_s x \text{ miatt } \varphi_{r+s} = \varphi_r + \varphi_s, \text{ és}$$

$$\varphi_{rs}x = (rs)x = r(sx) = \varphi_r(sx) = \varphi_r(\varphi_s x) \text{ miatt } \varphi_{rs} = \varphi_r\varphi_s.$$

ε injektív, mert $\varphi_r = \varphi_s$ esetén $r = \varphi_r 1 = \varphi_s 1 = s$, és szürjektív, mert ha $\varphi \in \mathrm{End}(R_R)$, és $\varphi 1 = r$, akkor $\varphi x = \varphi(1 \cdot x) = (\varphi 1) \cdot x = rx = \varphi_r x$ minden x-re, így $\varphi = \varphi_r$. Tehát ε gyűrűizomorfizmus.

4. *Bizonyítsuk be, hogy ha A véges dimenziós K-algebra, és $M \in \mathrm{mod}\text{-}A$, akkor $D^2(M) \cong M$, ahol egy $X \in \mathrm{mod}\text{-}A$ (vagy $X \in A\text{-}\mathrm{mod}$) modulusra $D(X) = \mathrm{Hom}_K(X, K) \in A\text{-}\mathrm{mod}$ (illetve $\in \mathrm{mod}\text{-}A$).*

Megoldás: Véges dimenziós A algebra fölötti végesen generált modulus is véges dimenziós, ugyanis homomorf képe A véges sok példánya direkt összegének. Tehát a feladatban $\dim_K M < \infty$. A véges dimenziós vektorterek duálisáról tudjuk, hogy az eredeti vektortérrel azonos dimenziós, így $\dim_K M = \dim_K D(M) = \dim_K D^2(M)$, tehát az izomorfizmushoz elég belátni, hogy van egy $\varepsilon : M \to D^2(M)$ injektív homomorfizmus.

Minden $m \in M$-re definiáljuk a $\Phi_m : D(M) \to K$ leképezést úgy, hogy $\alpha \in D(M) = \mathrm{Hom}_K(M, K)$-ra $\alpha\Phi_m = m\alpha \in K$. A Φ_m leképezés vektortér-homomorfizmus, mert

$$(\alpha + \beta)\Phi_m = m(\alpha + \beta) = m\alpha + m\beta = \alpha\Phi_m + \beta\Phi_m, \text{ és}$$

$$\lambda \in K\text{-ra } (\lambda\alpha)\Phi_m = m(\lambda\alpha) = \lambda(m\alpha) = \lambda(\alpha\Phi_m).$$

Legyen $\varepsilon : M \to D^2(M)$, $m \mapsto \Phi_m$. Ekkor ε jobbmodulus-homomorfizmus:

$$\alpha\Phi_{m+m'} = (m + m')\alpha = m\alpha + m'\alpha = \alpha\Phi_m + \alpha\Phi_{m'}$$

minden α-ra, tehát $\Phi_{m+m'} = \Phi_m + \Phi_{m'}$, és

$$\alpha\Phi_{mr} = (mr)\alpha = m(r\alpha) = (r\alpha)\Phi_m = \alpha(\Phi_m r),$$

minden α-ra, így $\Phi_{mr} = \Phi_m r$ (itt az $\alpha \in \mathrm{Hom}(M, K)$ és $\Phi_m \in \mathrm{Hom}(D(M), K)$ elemek r-rel való szorzásánál használtuk a $D(M) = \mathrm{Hom}(M, K)$ bal R-modulus- és a $D^2(M) = \mathrm{Hom}(D(M), K)$ jobb R-modulusszerkezetét).

Végül ε injektív, ugyanis ha $\Phi_m = 0$, akkor $m\alpha = \alpha\Phi_m = 0$ minden α-ra. De ha $m \neq 0$, akkor az M_K vektortérnek van K_K-ba menő vektortér-homomorfizmusa, amelyik m-et nem nullába viszi. Tehát $\Phi_m = 0$ esetén $m = 0$.

5. *Adjuk meg az A algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha $A = K\Gamma/I$, ahol Γ:* $\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, shift left, "\alpha"] & \overset{2}{\bullet} \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[loop right, "\gamma"] \end{tikzcd}$ *és*

a) $I = (\alpha\gamma, \gamma^2, \gamma\beta, \alpha\beta\alpha, \beta\alpha\beta)$;

b) $I = (\alpha\gamma^2, \gamma^2 - \beta\alpha, \alpha\beta)$.

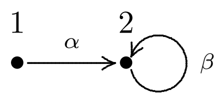
Megoldás: a) $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \\ 2 & & \end{smallmatrix}$

b) $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \\ & 2 & & 1 \\ & & 2 & \end{smallmatrix}.$

6. *Lehet-e az alábbi egy $K\Gamma/I$ algebra reguláris jobbmodulusának Loewy-diagramja? Ha igen, adjuk meg a Γ gráfot és az I ideálnak egy generátorrendszerét!*

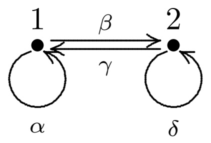
a) $\begin{smallmatrix}1\\2\\2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}$ *b)* $\begin{smallmatrix}&1&\\1&&2\\&2&\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&2&\\1&&2\end{smallmatrix}$ *c)* $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix} \oplus 3$

Megoldás: a) Nincs ilyen algebra. Ugyanis ennek az algebrának a gráfja csak



lehetne, de a második komponensből leolvasható, hogy $\beta^2 = 0$, míg az első komponensből azt látjuk, hogy $\alpha\beta^2 \neq 0$, ami ellentmondás.

b) Az algebra gráfja

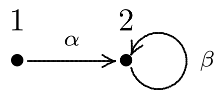


és $I = (\alpha^2, \beta\gamma, \alpha\beta - \beta\delta, \gamma\alpha, \gamma\beta, \delta^2, \delta\gamma)$.

c) Az algebra gráfja $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$, és $I = (\alpha\beta)$.

7. *Legyen $A = K\Gamma/I$ az az algebra, amelynek reguláris jobbmodulusa $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\2\\2\end{smallmatrix}$. Határozzuk meg az $\begin{smallmatrix}&1&\\1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$ modulus összes részmodulusát és az ezekkel vett faktorainak Loewy-diagramját!*

Megoldás: Az algebra gráfja Γ :



és $A = K\Gamma/(\alpha\beta^2, \beta^3)$. Nevezzük el az $M = \begin{smallmatrix}&1&\\1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$ modulus báziselemeit b_1, c_1, b_2, c_2-nek, ahol $Me_1 = \langle b_1, c_1\rangle$, $Me_2 = \langle b_2, c_2\rangle$ úgy, hogy a modulus

$$\begin{tikzcd} & c_1 \arrow[d, dash, "\alpha"] \\ b_1 \arrow[dr, dash, "\alpha"'] & c_2 \arrow[d, dash, "\beta"] \\ & b_2 \end{tikzcd}$$

Legyen $U \leq M$. Először tegyük fel, hogy $Ue_1 \neq 0$. Ha U-ban van $u = \lambda b_1 + \mu c_1$ alakú elem, ahol $\mu \neq 0$, akkor $u\alpha = \lambda b_2 + \mu c_2$, és $u\alpha\beta = \mu b_2$ miatt $b_2, c_2 \in U$, tehát vagy $U = M$, vagy U háromdimenziós, és bázisa $\{\, \lambda b_1 + \mu c_1, b_2, c_2 \,\}$. Legyen ez U_μ. Ezeknek a modulusoknak a Loewy-diagramja $\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}$. Ha $Ue_1 \neq 0$, de csak λb_1 alakú elemeket tartalmaz, akkor $b_1 \in U$, és ebből $b_2 \in U$ is következik. Így Ue_2 vagy Me_2-vel egyezik meg, vagy egydimenziós, tehát a részmodulus vagy $\langle b_1, b_2, c_2\rangle = \begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$, vagy $\langle b_1, b_2\rangle = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$. Ha $Ue_1 = 0$, és $U = Ue_2$-nek van $u = \lambda b_2 + \mu c_2$ alakú eleme $\mu \neq 0$-val, akkor $u\beta = \mu b_2 \in U$, így $b_2, c_2 \in U$, és $U = \langle c_2, b_2\rangle = \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}$. Ha ilyen elem sincs Ue_2-ben, de $U \neq 0$, akkor $U = \langle b_2\rangle$, és a Loewy-diagramja 2. Így a végtelen sok (de egymással izomorf) U_μ részmoduluson kívül, de a 0-t is beleszámítva 6 részmodulus van. A faktormodulusok Loewy-diagramjukkal felírva: 0, 1, $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$, $1 \oplus 1$, $1 \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$, és maga M.

8. *Hány dimenziós az 5.b) feladatban megadott A algebra fölött a* $\mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix})$*, illetve a* $\mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix})$ *vektortér?*

Megoldás: Legyen $M = \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix}$ és $N = \begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$). Az M generátorelemét csak a kétdimenziós Ne_2 altérbe képezhetjük, és van két ilyen független homomorfizmus: M-et $S(1)$-gyel lefaktorizálva, az $\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}$ modulust beágyazhatjuk N-be, illetve az $M/\operatorname{rad} M$-et beágyazhatjuk N talpába. Így $\dim_K \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix}) = 2$.

N-nek nyilván nincs monomorfizmusa M-be (a dimenziók miatt ennek izomorfizmusnak kellene lennie), és N minden nem nulla részmodulusa tartalmazza az N talpát, $S(2)$-t, tehát a homomorfizmusok valójában $S(1) \oplus S(2)$-ből mennek. Ez viszont csak az M, szintén $S(1) \oplus S(2)$-vel izomorf talpába képződhet. A $\mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix})$ vektorteret generálják a $\pi_1\iota_1$ és $\pi_2\iota_2$ morfizmusok, tehát 2-dimenziós.

9. *Bontsuk fel az $\mathbb{F}_2 D_3$ csoportalgebra jobbreguláris modulusát felbonthatatlan modulusok direkt összegére!*

Megoldás: Legyen f az egyik harmadrendű forgatás, t pedig az egyik tükrözés D_3-ban, és legyen $A = \mathbb{Z}_2 D_3$. Egy csoportalgebrában tetszőleges H részcsoport elemeinek u összegére $u^2 = |H|\,u$, így $\operatorname{char} K \mid |H|$ esetén u nilpotens, különben pedig $(1/|H|)u$ idempotens. Ebben az esetben $1 + f + f^2$ idempotens, sőt centrális idempotens is, mivel teljes konjugáltosztályok összege. Tehát a komplementerével, $f + f^2$-tel együtt A-nak gyűrűk direkt összegére való felbontását adja: $A = (1 + f + f^2)A \oplus (f + f^2)A$. Az első komponens 2-dimenziós, és van benne egy 1-dimenziós nilpotens ideál, amelyet D_3 elemeinek az összege generál, tehát a radikállal vett faktora egyszerű, és így nem bontható tovább modulusok direkt összegére. A második komponens viszont 4-dimenziós, ebben próbálunk még idempotenseket keresni.

Legyen $z = f + f^2$. Ekkor zA-nak mint vektortérnek bázisa $\{z, zt, zf, zft\}$ ($zf^2 = z + zf$, $zf^2t = zt + zft$).

A következő a szorzástábla a báziselemeken:

	z	zt	zf	zft
z	z	zt	zf	zft
zt	zt	z	$zt + zft$	$z + zf$
zf	zf	zft	$z + zf$	$zt + zft$
zft	zft	zf	zt	z

Ebből egyszerűen kiszámítható, hogy egy $az + bzt + czf + dzft$ elem négyzete $(a + b + c + d + bd)z + (bc)zt + (c)zf + (cd)zft$ (használva azt is, hogy $x^2 = x$ igaz $\mathbb{Z}_2$-ben). Tehát zA egy eleme akkor idempotens, ha $a = a + b + c + d + bd$, $b = bc$ és $d = cd$. Ha $c = 0$, akkor ebből $b = d = 0$, és akkor nem kapunk új idempotenst. Marad az, hogy $c = 1$ és $b + d + 1 + bd = 0$, azaz $(b + 1)(d + 1) = 0$, vagyis b és d egyike 1. Például $z(f + t)$ idempotens, és ennek kiegészítője $z + zf + zt$. Mindkettő kétdimenziós alteret generál, és a három nem 0 elemüket f ciklikusan permutálja, t pedig egyet fixen hagy, kettőt megcserél. Ebből látszik, hogy irreducibilis és egymással izomorf a kapott két modulus (az izomorfiát az is mutatja, hogy $t \cdot z(f+t)A = z(f^2t+1)A = z(1+f+t)A$). Tehát $\mathbb{Z}_2 D_3$-nak két nem izomorf 2-dimenziós direkt felbonthatatlan projektív modulusa van: $(1+f+f^2)A$ és $(f+f^2)(f+t)A = (1+f^2+ft+f^2t)A$ ezeknek egy-egy példánya a csoportalgebrában. Az elsőnek van egy nemtriviális radikálja, a második viszont egyszerű modulus.

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy* $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$*-nek mint önmaga fölötti modulusnak vannak felbonthatatlan direkt összeadandói, de nem bontható fel felbonthatatlanok direkt összegére!*

Hf2. *Legyen* $e, f \in R$ *két idempotens elem. Bizonyítsuk be, hogy az* eR *és* fR *modulusok akkor és csak akkor izomorfak, ha van olyan* $x \in fRe$ *és* $y \in eRf$*, hogy* $yx = e$*, és* $xy = f$*.*

Hf1. *Írjuk fel az* $A = K\Gamma/I$ *algebra direkt felbonthatatlan projektív modulusainak Loewy-diagramját, ha*

$$\Gamma : 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\delta}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} 3, \qquad I = (\alpha\beta, \beta\alpha - \gamma\delta, \delta\beta, \delta\gamma).$$