1. *Legyenek $U \leq M$ modulusok. Bizonyítsuk be, hogy M akkor és csak akkor maximum-feltételes (illetve minimum-feltételes), ha U és M/U is ilyen tulajdonságú.*

Megoldás: Tegyük fel, hogy M maximum-feltételes. U minden fölszálló $U_1 \leq U_2 \leq \cdots$ moduluslánca M-nek is modulusslánca, tehát van olyan n, hogy $U_n = U_{n+1} = \cdots$. Másrészt M/U tetszőleges fölszálló modulusláncának az őskëpei M-ben szintén fölszálló modulusláncot alkotnak, ezért az is stabilizálódik.

Tegyük fel most, hogy U és M/U maximumfeltételes, és legyen $M_1 \leq M_2 \leq \cdots$ fölszálló modulusslánc M-ben. Ekkor az $M_1 \cap U \leq M_2 \cap U \leq \cdots$ és $(M_1 + U)/U \leq (M_2 + U)/U \leq \cdots$ U-beli, illetve M/U-beli modulusláncok stabilizálódnak, tehát valamilyen n_0-tól kezdve $M_n \cap U = M_{n+1} \cap U$ és $M_n + U = M_{n+1} + U$. De akkor $M_{n+1} = M_{n+1} \cap (U + M_{n+1}) = M_{n+1} \cap (U + M_n) = (M_{n+1} \cap U) + M_n = (M_n \cap U) + M_n = M_n$, ha $n \geq n_0$ (a középső egyenlőségnél az 1. feladatsor Hf1. feladatában bizonyított moduláris azonosságot használtuk).

Leszálló modulusláncokra ugyanígy megy a bizonyítás.

2. *Bizonyítsuk be, hogy egy modulus akkor és csak akkor maximum- és minimumfeltételes, ha van véges kompozíciólánca.*

Megoldás: Ha van véges kompozíciólánca, akkor a Jordan-Hölder-tétel miatt minden (ismétlődésmentes, felszálló) véges moduluslánc ilyen hosszúságú kompozícióláncá finomítható, tehát semelyik véges moduluslánc nem lehet ennél hosszabb. Így nem létezhet végtelen, ismétlődésmentes felszálló vagy leszálló moduluslánc.

Fordítva, tegyük fel, hogy az M modulus maximum- és minimumfeltételes. Ekkor létezik minimális $M_1 \neq 0$ részmodulusa (egy $U_1 > U_2 > \cdots$ láncnak le kell állnia). Az M/M_1 faktormodulus szintén minimumfeltételes az 1. feladat szerint, tehát annak is van M_2/M_1 minimális nem nulla részmodulusa. Ezt folytatva kapunk egy $0 < M_1 < M_2 < \cdots$ modulusláncot egyszerű faktorokkal. De a maximumfeltétel miatt ennek is le kell állnia, azaz van olyan n, hogy $M_n = M$, és ezzel egy véges kompozícióláncot kaptunk.

3. *Lássuk be, hogy egy R gyűrűben egy a elem akkor és csak akkor van benne egy nilpotens jobbideálban, ha egy nilpotens balideálban is benne van.*

Megoldás: Az a elem akkor van benne egy nilpotens jobb ideálban, ha az a által generált aR jobbideál nilpotens, azaz van olyan n, hogy $(aR)^n = 0$. Ebből viszont következik, hogy az RaR ideál is nilpotens: $(RaR)^n = R(aR)^n = R0 = 0$, tehát egyúttal nilpotens balideál is. Ugyanígy igaz a másik irány.

4. *Tegyük fel, hogy egy R gyűrű jobb-Artin és jobb-Noether. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek R tetszőleges J jobbideáljára.*

(i) *J nilpotens;*
(ii) *J annullál minden egyszerű jobb R-modulust;*
(iii) *minden véges kompozícióláncú jobb R-modulust annullál J-nek egy alkalmas hatványa.*

Megoldás: *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*: Tegyük fel, hogy $J^n = 0$, és legyen S egyszerű modulus. Ha $SJ \neq 0$, akkor $SJ \leq S$ miatt $SJ = S$, de akkor $S = SJ = SJ^2 = \ldots = SJ^n = S0 = 0$ ellentmondás.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*: Legyen $0 = M_0 < M_1 < \cdots M_n = M$ egy (a 2. feladat szerint létező) kompozíciólánc az M modulusban. Ekkor M_{i+1}/M_i egyszerű minden i-re, tehát a *(ii)*

feltétel szerint $M_{i+1}J \leq M_i$. De akkor $MJ^n = M_nJ^n \leq M_{n-1}J^{n-1} \leq \cdots \leq M_1J \leq M_0 = 0$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Az előző feladat szerint R_R-nek van véges kompozíciólánca, így J valanely hatványa annullálja: $RJ^n = 0$. De $1 \in R$ miatt $RJ^n \geq J^n$, tehát J nilpotens.

5. *Legyenek M_i $(i \in I)$ részmodulusok M-ben. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $M/\bigcap_{i\in I} M_i$ beágyazható $\prod_{i\in I} M/M_i$-be, de nem feltétlenül ágyazható be $\bigoplus_{i\in I} M/M_i$-be.*

Megoldás: Vegyük a $\varphi : M \to \prod_{i\in I} M/M_i$, $m\varphi = (\ldots, m + M_i, \ldots)$ homomorfizmust. Ennek a magja éppen az M_i-k metszete, így $M/\bigcap_{i\in I} M_i \cong \operatorname{Im}\varphi \leq \prod_{i\in I} M/M_i$. Viszont $\mathbb{Z}_\mathbb{Z}$-ben $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{Z} = 0$, de $\mathbb{Z}$ nyilván nem ágyazható be a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$-ek direkt összegébe (például mert az utóbbinak minden eleme véges rendű).

6. *Definiáljuk a $J(R)$ Jacobson-radikált úgy, mint az R maximális jobbideáljainak (azaz R_R maximális részmodulusainak) metszetét. Bizonyítsuk be, hogy ha R jobb-Artin és jobb-Noether, akkor*

a) $J(R)$ a legkisebb (azaz minden más ilyenben benne levő) olyan jobbideál, hogy az R_R-nek ezzel vett faktormodulusa féligegyszerű.
b) $J(R)$ a legnagyobb (azaz minden más ilyet tartalmazó) nilpotens jobbideál.
c) $J(R)$ az egyetlen olyan jobbideál, amelyre $R_R/J(R)$ féligegyszerű és $J(R)$ nilpotens.

Megoldás: a) A minimumfeltétel miatt $J(R)$ megkapható véges sok maximális jobbideál metszeteként ($M_1 > (M_1 \cap M_2) > \cdots > (M_1 \cap \cdots \cap M_k) > \cdots$, ahol M_k-t akkor választhatjuk be, ha az eddigi metszet M_k-ban még nincs benne). Az 5. feladat szerint így $R_R/J(R)$ beágyazható az R_R/M_k egyszerű modulusok direkt szorzatába, ami véges sok tag esetén megegyezik a direkt összeggel, tehát féligegyszerű, és így $R_R/J(R)$ is féligegyszerű. Másrészt ha R/J féligegyszerű valamely J jobbideálra, akkor $R/J \cong \oplus S_i$ valamely S_i egyszerű modulusokra. A $\varphi_i : R_R \to R_R/J \xrightarrow{\pi_i} S_i$ morfizmusokra $J = \cap \operatorname{Ker}\varphi_i$, ami maximális modulusok metszete, így tartalmazza $J(R)$-t.

b) A 4. feladat szerint J akkor és csak akkor nilpotens, ha annullál minden egyszerű modulust, azaz ha benne van minden maximális jobbideálban, azaz benne van ezek metszetében, $J(R)$-ben.

c) Az a) és b) részből kiderült, hogy $J(R)$ nilpotens, és $R_R/J(R)$ féligegyszerű. Másrészt ha egy J jobbideál nilpotens, és R/J féligegyszerű, akkor az a) és b) rész szerint $J \geq J(R)$, és $J \leq J(R)$, tehát $J = J(R)$.

7. *Bizonyítsuk be, hogy egy jobb-Artin és jobb-Noether gyűrű Jacobson-radikálja, $J(R)$ ideál, és ugyanezt az ideált kapjuk, ha $J(R)$-et R maximális balideáljainak metszeteként definiáljuk.*

Megoldás: $J(R)$ nilpotens jobbideál, azaz van olyan n, hogy $J(R)^n = 0$. De ekkor $(RJ(R))^n \leq R(J(R)R)^n = RJ(R)^n = R0 = 0$, tehát a 6.b) feladat szerint $RJ(R) \leq J(R)$, így $J(R)$ ideál is, sőt $J(R)$ az R legnagyobb nilpotens ideálja. Ez utóbbi nyilván akkor is teljesül, ha $J(R)$-t a maximális balideálok metszeteként definiáljuk (az eddigi feladatokat balideálokra és balmodulusokra mondjuk ki és bizonyítjuk be), tehát ugyanazt a Jacobson-radikált kapjuk.

Egy X részmodulus kicsi M-ben ($X << M$), ha minden $Y \leq M$-re $X + Y = M$-ből következik, hogy $Y = M$.

8. *Bizonyítsuk be, hogy ha $Y \leq X << M$ és $Z \leq M$, akkor*
a) $Y << M$;
b) $\overline{X} << M/Z$, ahol $\overline{X} = (X + Z)/Z$ az X képe a Z-vel való faktorizálásnál.

Megoldás: a) Tegyük fel, hogy $Y + U = M$ valamely $U \leq M$-re. Ekkor $M = Y + U \leq X + U \leq M$, tehát $X + U = M$, és ebből $X << M$ miatt $U = M$ következik.
b) Legyen $\overline{U} = U/M$ valamely $Z \leq U \leq M$-re. Ha $\overline{X} + \overline{U} = \overline{M}$, akkor $X + U + Z = M$, de $Z \leq U$, így $X + U = M$, és ebből $X << M$ miatt $U = M$, azaz $\overline{U} = \overline{M}$.

9. *(Fitting-lemma) Bizonyítsuk be, hogy ha M maximum- és minimumfeltételes modulus, és $\varphi \in \mathrm{End}(M)$, akkor van olyan n, amelyre $M = \mathrm{Ker}\,\varphi^n \oplus \mathrm{Im}\,\varphi^n$.*

Megoldás: A $\mathrm{Ker}\,\varphi \leq \mathrm{Ker}\,\varphi^2 \leq \cdots$ és az $\mathrm{Im}\,\varphi \geq \mathrm{Im}\,\varphi^2 \geq \cdots$ láncok mindegyike stabilizálódik, azaz van olyan n, hogy $\mathrm{Ker}\,\varphi^n = \mathrm{Ker}\,\varphi^{n+1} = \cdots$, és $\mathrm{Im}\,\varphi^n = \mathrm{Im}\,\varphi^{n+1} = \cdots$.

Belátjuk, hogy ekkor $M = \mathrm{Ker}\,\varphi^n \oplus \mathrm{Im}\,\varphi^n$. Egyrészt ha $m \in \mathrm{Ker}\,\varphi^n \cap \mathrm{Im}\,\varphi^n$, akkor van olyan m', hogy $m = m'\varphi^n$, így $m'\varphi^{2n} = m\varphi^n = 0$, tehát $m' \in \mathrm{Ker}\,\varphi^{2n} = \mathrm{Ker}\,\varphi^n$, ezért $m = m'\varphi^n = 0$.

Másrészt tetszőleges $m \in M$-re $m\varphi^n \in \mathrm{Im}\,\varphi^n = \mathrm{Im}\,\varphi^{2n}$, tehát van olyan m', amire $m\varphi^n = m'\varphi^{2n}$. Ebből $(m - m'\varphi^n)\varphi^n = 0$, azaz $m - m'\varphi^n \in \mathrm{Ker}\,\varphi^n$, míg $m'\varphi^n \in \mathrm{Im}\,\varphi^n$, így $m \in \mathrm{Ker}\,\varphi^n + \mathrm{Im}\,\varphi^n$.

Hf1. *Legyen M maximum-feltételes modulus. Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{rad}\,M$ a legnagyobb olyan részmodulus, amely kicsi M-ben.*

Hf2. *Határozzuk meg az $\mathbb{F}_3 C_3$ csoportalgebra Jacobson-radikálját!*

Hf3. *Bizonyítsuk be, hogy minden kommutatív nullosztómentes Artin-gyűrű test.*