1. *Tegyük fel, hogy* $R = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$*, ahol minden* P_i *direkt felbonthatatlan modulus. Nevezzük* P_i*-t és* P_j*-t szomszédosnak, ha* $\mathrm{Hom}(P_i, P_j) \neq 0$ *vagy* $\mathrm{Hom}(P_j, P_i) \neq 0$*, és legyenek* $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_t$ *az így kapott gráf összefüggő komponensei. Bizonyítsuk be, hogy* $\oplus \{ P_i \mid P_i \in \mathcal{K}_j \}$ *direkt felbonthatatlan ideálja* R*-nek minden* j*-re, és* R *ezeknek a direkt felbonthatatlan gyűrűknek a direkt összege.*

Megoldás: Legyen $R_j = \bigoplus_{P_i \in \mathcal{K}_j} P_i$. Tegyük fel, hogy $P \in \mathcal{K}_j$ és $r \in R$. Ekkor $rP = 1 \cdot rP = (e_1 + \ldots + e_n)rP = \oplus e_i rP$, ahol $P_i = e_i R$, tehát $e_i rP \leq P_i$ minden i-re. Ha $e_i rP \neq 0$, akkor $\mathrm{Hom}(P, P_i) \neq 0$, tehát $P_i \in \mathcal{K}_j$. Így $rP \leq R_j$ minden $P \in \mathcal{K}_j$-re és $r \in R$-re, vagyis $R_i \lhd R$.

Ha $R_j = S \oplus T$ nem triviális gyűrűdirektösszeg, akkor a Krull–Schmidt-tétel szerint S és T is $\mathcal{K}_j$-beli P_i-k direkt összege, így S valamelyik komponense és T valamelyik komponense között van homomorfizmus, és ez természetes módon kiterjed S és T közötti homomorfizmussá. De $S^2 = S$, és $TS \leq T \cap S = 0$ miatt $\varphi \in \mathrm{Hom}(S, T)$-re $S\varphi = S^2\varphi = S\varphi S \leq TS = 0$, tehát $\mathrm{Hom}(S, T) = 0$, és ugyanígy $\mathrm{Hom}(T, S) = 0$, ami ellentmond az előbbieknek.

2. *Bizonyítsuk be, hogy* $\mathrm{Hom}(M_A, A_A)$ *bal* A*-modulus (másképpen jobb* A^{opp}*-modulus), ha a homomorfizmusokat balról írjuk, és ha* M *felbonthatatlan projektív* mod-A*-ban, akkor* $\mathrm{Hom}(M_A, A_A)$ *felbonthatatlan projektív* A-mod*-ban.*

Megoldás: Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az $(a\varphi)m := a(\varphi m)$ definícióval kapott $a\varphi$ leképezés modulushomomorfizmus M-ből A_A-ba, és hogy az A elemeivel így definiált balszorzás a $\mathrm{Hom}(M, A_A)$-t bal A-modulussá teszi. $\mathrm{Hom}(A_A, A_A)$ mint bal A-modulus is izomorf A-val. Minden $\varphi \in \mathrm{Hom}(e_i A, A_A)$-ra $\varphi e_i = \varphi e_i^2 = (\varphi e_i)e_i \in Ae_i$. Legyen $\Psi : \mathrm{Hom}(e_i A, A_A) \to Ae_i$, $\varphi \to \varphi e_i$. Ez bal A-modulus-homomorfizmus: $a\varphi \to (a\varphi)e_i = a(\varphi e_i)$. Ψ injektív, mert ha $\varphi e_i = 0$, akkor minden $a \in A$-ra $\varphi(e_i a) = (\varphi e_i)a = 0a = 0$, tehát ekkor $\varphi = 0$. Másrészt Ψ szürjektív is, mert a $\iota_i : e_i A \to A_A$ természetes beágyazásra $\Psi(\iota_i) = e_i$, és e_i generálja Ae_i-t. Tehát $\mathrm{Hom}(e_i A, A_A) \cong Ae_i$ vagyis a $\mathrm{Hom}(-, A_A)$ funktor az e_i-hez tartozó felbonthatatlan projektív jobbmodulust az e_i-hez tartozó felbonthatatlan projektív balmodulusba képezi.

3. *Bizonyítsuk be, hogy a* $\mathrm{Hom}(M, -)$ *és* $\mathrm{Hom}(-, N)$ *funktorok a* $\mathrm{Hom}(X, Y)$ *Abel-csoporton csoporthomomorfizmusként hatnak. Speciálisan, lássuk be, hogy ha* A *véges dimenziós* K*-algebra, és a funktor a* K*-duális,* $D = \mathrm{Hom}_K(-, K)$*, akkor a* $D : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(D(Y), D(X))$ *leképezés injektív* K*-homomorfizmus, sőt izomorfizmus.*

Megoldás: Legyen $F = \mathrm{Hom}(M, -)$ és $G = \mathrm{Hom}(-, N)$. $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}(X, Y)$-ra és $\varphi \in \mathrm{Hom}(M, X)$-re $\varphi(F(\alpha + \beta)) = \varphi(\alpha + \beta) = \varphi\alpha + \varphi\beta = \varphi F(\alpha) + \varphi F(\beta) = \varphi(F(\alpha) + f(\beta))$, tehát $F(\alpha+\beta) = F(\alpha)+F(\beta)$. Ugyanígy egy $\varphi \in \mathrm{Hom}(Y, N)$-re $\varphi(G(\alpha+\beta)) = (\alpha+\beta)\varphi = \alpha\varphi + \beta\varphi = \varphi(G(\alpha)) + \varphi(G(\beta)) = \varphi(G(\alpha) + G(\beta))$, tehát $G(\alpha + \beta) = G(\alpha) + G(\beta)$.

Könnyen látható, hogy D nemcsak Abel-csoport-homomorfizmus, hanem vektortér-homomorfizmus is $\mathrm{Hom}(X, Y)$-ból $\mathrm{Hom}(D(Y), D(X))$-be. Tegyük fel, hogy $\alpha : X \to Y$ nem 0. Ekkor van olyan x, hogy $x\alpha = y \neq 0$. Másrészt Y_K-ból mint vektortérből van olyan φ homomorfizmus K-ba, amelyre $y\varphi \neq 0$. Így $\varphi D(\alpha) = \alpha\varphi \neq 0$, vagyis D injektív. Másrészt $\dim_K D(X) = \dim_K X$ ($D(X)$-nek bázisa a $\{ b'_1, \ldots, b'_k \}$, ahol $b_j b'_i = \delta_{ij}$, ha $\{ b_1, \ldots, b'_k \}$ bázisa X-nek), és ugyanígy $\dim_K D(Y) = \dim_K Y$. Ezért $\dim_K \mathrm{Hom}(X, Y) =$

$\dim_K X \cdot \dim_K Y = \dim_K D(Y) \cdot \dim_K D(X) = \dim_K \operatorname{Hom}(D(Y), D(X))$, tehát $\operatorname{Hom}(X, Y) \cong \operatorname{Hom}(D(Y), D(X))$.

4. *Lássuk be, hogy egy A véges dimenziós algebrára a K-duális egzakt sorozatot egzakt sorozatba visz, és egy ilyen sorozat akkor és csak akkor felhasadó, ha a képe az!*

Megoldás: Legyen $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z$ egzakt (azaz $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$), és $D(Z) \xrightarrow{D(\beta)} D(Y) \xrightarrow{D(\alpha)} D(X)$ a $D = \operatorname{Hom}_K(-, K)$ funktorral vett képe. Ekkor $D(\beta)D(\alpha) = D(\alpha\beta) = D(0) = 0$, tehát $\operatorname{Im} D(\beta) \leq \operatorname{Ker} D(\alpha)$. Másrészt, ha $\varphi \in \operatorname{Ker} D(\alpha)$, azaz $\alpha\varphi = 0$, akkor $\operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Im}\alpha \leq \operatorname{Ker}\varphi$, tehát φ indukál egy $\overline{\varphi}$ morfizmust $\overline{Y} = Y/\operatorname{Ker}\beta$-ból K-ba. Minthogy $\overline{Y} \xrightarrow{\overline{\beta}} Z$ monomorfizmus, és K_K injektív, $\overline{\varphi}$ átvezethető Z-n és ez épp azt jelenti, hogy van olyan $\psi : Z_K \to K$, amelyre $\overline{\varphi} = \overline{\beta}\psi$, azaz $\varphi = \beta\psi$, és így $\varphi \in \operatorname{Im} D(\beta)$. Tehát a $D(Z) \xrightarrow{D(\beta)} D(Y) \xrightarrow{D(\alpha)} D(X)$ sorozat is egzakt.

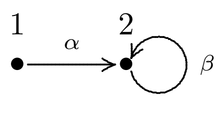
Egy $0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ sorozat pontosan akkor felhasadó, ha van olyan $\alpha' : Y \to X$ és $\beta' : Z \to Y$, amire $\alpha\beta = 0$, $\beta'\alpha' = 0$, $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$, $\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$ és $\alpha'\alpha + \beta\beta' = \mathrm{id}_Y$ (ehhez még az egzaktságot sem kell külön feltenni). Ezeket az egyenlőségeket nyilván megtartja a D (csak fordított irányú szorzással), tehát D felhasadó egzakt sorozatot felhasadó egzaktba visz. És fordítva, ha a kép felhasadó, akkor a 3. feladat eredménye miatt az eredeti sorozatra is teljesültek az egyenlőségek, tehát az is felhasadó egzakt.

5. *Tegyük fel, hogy A gráfalgebra $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nyilakkal, és hogy az $M \in \text{mod-}A$ modulusnak van olyan $\mathcal{B} = \{ b_1, \ldots, b_\ell \}$ bázisa, amelyre a $\mathcal{B} \cup \{ 0 \}$ halmazt minden nyíllal való jobbszorzás önmagába képezi. Jelölje továbbá minden α nyílra $b_i\alpha^{-1}$ az $\{ x \in \mathcal{B} \mid x\alpha = b_i \}$ halmazt. Bizonyítsuk be, hogy $D(M)$-nek bázisa a $\mathcal{B}' = \{ b'_1, \ldots, b'_k \}$ halmaz, ahol $b'_i : b_j \mapsto \delta_{ij}$, és $\alpha b'_i = (\sum b_i\alpha^{-1})'$.*

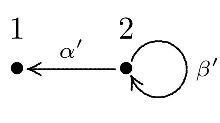
Megoldás: Tetszőleges $\varphi \in D(M) = \operatorname{Hom}_K(M, K)$-ra $\varphi = \sum (b_i\varphi)b'_i$, így a b'_i elemek generátorrendszert alkotnak $D(M)$-ben, és nyilván függetlenek. Az α nyílra $b_j(\alpha b'_i) = (b_j\alpha)b'_i$, ami 1, ha $b_j\alpha = b_i$, és 0 különben. Tehát $\alpha b'_i = \sum \{ b'_j \mid b_j\alpha = b_i \} = (\sum b_i\alpha^{-1})'$.

6. *Legyen $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\2\\2\end{smallmatrix}$. Határozzuk meg ${}_AA$ Loewy-diagramját, és duálisképzéssel az összes felbonthatatlan injektív jobb A-modulust. Adjuk meg az algebra Auslander–Reiten-gráfjában a projektív modulusokba menő és az injektív modulusokból kiinduló irreducibilis morfizmusokat.*

Megoldás: Az algebra gráfja Γ:



és $A \cong K\Gamma/I$, ahol $I = (\alpha\beta^2, \beta^3)$. ${}_AA$ Loewy-diagramja megegyezik $A^{opp}_{A^{opp}}$ Loewy-diagramjával. A^{opp} gráfja Γ^{opp}:



és $I^{opp} = ((\beta')^2\alpha', (\beta')^3)$. Ebből azt kapjuk, hogy

$$ {}_A A = A^{opp}_{A^{opp}} = 1 \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & & \\ 1 & & 2 & \\ & & 1 & 2 \end{smallmatrix} \,. $$

Erre a modulusra teljesülnek a 3. feladat feltételei, és minden báziselemnek minden nyíllal csak egy őspképe van, így a duálist egyszerűen a diagram megfordításával kapjuk:

$$ D({}_A A) = 1 \oplus \begin{smallmatrix} & & 1 & & 2 \\ 1 & & & 2 & \\ & 2 & & & \end{smallmatrix} \,. $$

A projektív modulusokba menő irreducibilis morfizmusok a radikáljuk direkt összeadandóinak beágyazásai, azaz $\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}$ és $\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}$. Az injektívekből menő irreducibilis morfizmusok pedig a talppal vett faktornak a vetítései a direkt komponensekre, azaz $\begin{smallmatrix} & & 1 & & 2 \\ 1 & & & 2 & \\ & 2 & & & \end{smallmatrix} \to 1$ és $\begin{smallmatrix} & & 1 & & 2 \\ 1 & & & 2 & \\ & 2 & & & \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$.

7. *Adjuk meg az előző feladat algebrája fölött az* $M = \begin{smallmatrix} & & 1 \\ 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$ *és* $\begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ 2 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$ *modulusok* K*-duálisának Loewy-diagramját.*

Megoldás: Mindkét modulusban teljesülnek a 3. feladat feltételei. Az elsőben minden báziselemnek mindegyik nyílra nézve legföljebb egy őspképe van, tehát a Loewy-diagramja az eredeti Loewy-diagram megfordítása: $\begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \\ & & 1 \end{smallmatrix}$. Ha a második báziselemei b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, ahol

$$
\begin{tikzcd}
b_1 \arrow[d, dash, "\alpha"'] & & b_2 \arrow[d, dash, "\beta"] \\
b_3 \arrow[dr, dash, "\beta"'] & & b_4 \arrow[dl, dash, "\beta"] \\
& b_5 &
\end{tikzcd}
$$

akkor a duálisának bázisa $\{ b'_1, b'_2, b'_3, b'_4, b'_5 \}$:

$$
\begin{tikzcd}
& b'_5 \arrow[d, dash, "\beta'"'] & \\
b'_3 \arrow[d, dash, "\alpha'"'] \arrow[r, dash, dashed] & {} \arrow[r, dash, dashed] & b'_4 \arrow[d, dash, "\beta'"] \\
b'_1 & & b'_2
\end{tikzcd}
$$

azaz $\beta' : b'_5 \mapsto b'_3 + b'_4$, $\beta' : b'_4 \mapsto b'_2$ és $\alpha' : b'_3 \mapsto b'_1$. Legyen $b''_3 = b'_3 + b'_4$, ekkor a $\{ b'_1, b'_2, b''_3, b'_4, b'_5 \}$ bázisban a modulus Loewy-diagramja

$$
\begin{tikzcd}
& b'_5 \arrow[d, dash, "\beta'"'] & & \\
& b''_3 \arrow[dl, dash, "\alpha'"'] \arrow[dr, dash, "\beta'"] & & b'_4 \arrow[dl, dash, "\beta'"] \\
b'_1 & & b'_2 &
\end{tikzcd}
\quad \text{azaz} \quad
\begin{tikzcd}
& 2 \arrow[d, dash] & & \\
& 2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & 2 \arrow[dl, dash] \\
1 & & 2 &
\end{tikzcd}
$$

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy a* $D = \mathrm{Hom}_K(-, K) : \text{mod-}A \to A\text{-mod}$ *funktor egyszerű modulust egyszerű modulusba visz.*

Hf2. *Adjuk meg az* $A_A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$ *algebra felbonthatatlan injektív modulusainak Loewy-diagramját.*