Gyűrűk és csop. repr. **7. feladatsor (megoldások)** *2013. április 9.*

1. *Legyen* $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\\&2&\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$. *Bizonyítsuk be, hogy A Frobenius-algebra.*

Megoldás: Az algebra gráfja $\Gamma : 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\delta}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} 3$, és $A = K\Gamma/I$, ahol $I = (\alpha\beta, \delta\gamma, \beta\alpha - \gamma\delta)$. A_A talpa $\operatorname{soc} A_A = \langle \alpha\gamma, \beta\alpha, \delta\beta\rangle = S_3 \oplus S_2 \oplus S_1$. Mivel $S_i = P_i / \operatorname{rad} P_i$, minden $x \in S_i$-re $xe_i = x$ és $xe_j = 0$, ha $j \neq i$. Legyen $\varphi : A \to K$ az a lineáris leképezés, amely 1-et vesz föl $\alpha\gamma$-n, $\beta\alpha$-n és $\delta\beta$-n, és 0-t a bázis kiegészítő részén: $\{ e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta, \gamma, \delta \}$-n. Belátjuk, hogy $\operatorname{Ker}\varphi$ nem tartalmaz nem nulla jobbideált. Legyen ugyanis $0 \neq u \in M \leq A_A$, és k a legkisebb szám, amire $uJ(A)^k \neq 0$. Ekkor van $0 \neq v \in uJ(A)^k$, és erre $vJ(A) = 0$, vagyis $vA \leq M$ féligegyszerű. Ebből következik, hogy $vA \leq \operatorname{soc} A_A$, tehát $v = x\alpha\gamma + y\beta\alpha + z\delta\beta$ valamely $x, y, z \in K$-ra. A három együttható közül legalább az egyik nem 0, és ha az S_i-belinek az együtthatója az, akkor $0 \neq ve_i \in M$. De ekkor ve_i $\alpha\gamma, \beta\alpha, \delta\beta$ egyikének nem 0 skalárszorosa, így ezen a φ értéke nem 0, tehát M nincs benne $\operatorname{Ker}\varphi$-ben. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\operatorname{soc}{}_A A = \langle \alpha\gamma, \beta\alpha, \delta\beta\rangle = S_1^\circ \oplus S_2^\circ \oplus S_3^\circ$ is igaz (ahol $S_i^\circ = P_i^\circ / \operatorname{rad} P_i^\circ$, és $P_i^\circ = Ae_i$), és ebből kijön, hogy $\operatorname{Ker}\varphi$ nem 0 balideált sem tartalmaz.

2. *Bizonyítsuk be, hogy minden öninjektív bázisalgebra Frobenius-algebra.*

Megoldás: Legyen $A_A = \oplus e_i A$ az A_A reguláris modulus felbonthatatlan komponensekre bontása. Mivel A öninjektív, az e_iA-k a felbonthatatlan projektívek és egyúttal a felbonthatatlan injektívek, és így e_iA teteje és talpa is egyszerű. Legyen $S_i = e_iA / e_i(\operatorname{rad} A)$ és $T_i = \operatorname{soc} e_i A$. A bázisalgebra, így $i \neq j$-re $e_iA \ncong e_jA$, és tudjuk, hogy ebből $S_i \ncong S_j$, és duálisan (mivel e_iA és e_jA felbonthatatlan injektívek is) $T_i \ncong T_j$ is következik.

Először belátjuk, hogy $T = \oplus T_i$ ideál, és hogy A_A-nak és ${}_AA$-nak is T a talpa. Ha $S \leq A_A$ egyszerű, akkor $S = 1S = (\sum e_i)S \leq \sum(e_iS) \leq T$, mert $e_iS \leq e_iA$ az S-nek homomorf képe, tehát 0 vagy egyszerű, és így $\leq T_i$. Ezzel azt kaptuk, hogy $T = \operatorname{soc} A_A$. Minden $S \leq A_A$ egyszerű modulusra és $a \in A$-ra aS homomorf képe S-nek, így csak 0 vagy egyszerű modulus lehet, tehát $aS \leq \operatorname{soc} A_A = T$. Következésképpen $T \lhd A$. $T \leq \operatorname{soc}{}_A A$, ugyanis $(\operatorname{rad} A)T = 0$: Ha $u \in \operatorname{rad} A$-ra $e_j u T_i \neq 0$, akkor $T_i \twoheadrightarrow e_juT_i$ miatt $e_juT_i \cong T_i = \operatorname{soc} e_iA$, és $e_juT_i \leq e_jA$, így $i = j$. De akkor a $\psi : e_iA \to e_iA$, $x\psi = e_iux$ homomorfizmusra $\operatorname{Im}\psi \leq e_i(\operatorname{rad} A)$, tehát ψ nem szürjektív, és így a véges dimenzió miatt nem is injektív, amiből $T_i\psi = 0$ következik, azaz $e_juT_i = e_iuT_i = 0$, ellentmondva a feltevésnek. Ezzel azt kaptuk, hogy $(\operatorname{rad} A)T = (\sum e_j) \operatorname{rad} A)T = 0$, tehát ${}_AT$ féligegyszerű, és így $T \leq \operatorname{soc}{}_AA$. Ugyanezt az A^{opp} algebrára alkalmazva azt kapjuk, hogy $\operatorname{soc}{}_AA \leq \operatorname{soc} A_A$ is igaz, tehát $\operatorname{soc}{}_AA = \operatorname{soc} A_A = T$.

Legyen $0 \neq b_i \in T_i$ minden i-re, és definiáljuk a $\varphi : A \to K$ K-lineáris leképezést úgy, hogy $b_i\varphi = 1$ minden i-re, és $\varphi = 0$ a $\{ b_i \}$-t az A egy K-bázisává kiegészítő elemeken. Azt kell belátnunk, hogy $\operatorname{Ker}\varphi$ nem tartalmaz nem triviális jobbideált (és ugyanígy balideált sem). Legyen $0 \neq W \leq {}_AA$. Ekkor van olyan k, hogy $W(\operatorname{rad} A)^k = 0$, de $W(\operatorname{rad} A)^{k-1} \neq 0$. Válasszunk egy $0 \neq u \in W(\operatorname{rad} A)^{k-1}$ elemet. Erre $u \in T$, és $u = u \cdot 1 = \sum ue_j$ miatt van olyan j, amelyre $ue_j \neq 0$. Mivel $T = \oplus T_i \cong \oplus S_j$, és e_j-t annullálja a j-től különböző indexű egyszerű modulusokat, $ue_j \in T_i$ valamely i-re. Mivel T_i egyszerű, van olyan $a \in A$, hogy $ue_ja = b_i$, és így $(ue_ja)\varphi \neq 0$. Tehát $W \nleq \operatorname{Ker}\varphi$.

3. *Keressük meg C_3 irreducibilis reprezentációit egy tetszőleges K test fölött! Határozzuk meg KC_3 részmodulusait, ha K karakterisztikája 3.*

Megoldás: C_3 reprezentációi $GL(V)$-be menő csoport-homomorfizmusok. A reprezentációt meghatározza a C_3 generátorelemének a képe: egy olyan A mátrix, amelyre $A^3 = I$. Ahhoz, hogy a reprezentáció irreducibilis legyen, az kell, hogy V-nek ne legyen A-invariáns valódi altere. Legyen $m(x)$ az A minimálpolinomja. $A^3 = I$ miatt $m(x) \mid x^3 - 1$. Ha $m(1) = 0$, akkor 1 sajátértéke A-nak, tehát A-nak van sajátvektora, és az ez által generált altér A-invariáns, azaz ekkor $\dim V = 1$, és A triviálisan hat rajta. $\operatorname{char} K = 3$ esetén $x^3 - 1 = (x-1)^3$, ezért ekkor más irreducibilis reprezentáció nincs is.

Tegyük fel most, hogy $\operatorname{char} K \neq 3$ és $m(1) \neq 0$. Ekkor $m(x) \mid x^2+x+1$. Ha x^2+x+1 reducibilis K fölött, akkor a gyökei különbözőek (ugyanis $x^3 - 1$-nek sincs többszörös gyöke 3-tól különböző karakterisztika esetén, mert $x^3 - 1$ relatív prím a deriváltjához), és mindkét sajátértékhez tartozik egy egydimenziós reprezentáció. Ekkor C_3-nak három elsőfokú reprezentációja van.

Ha x^2+x+1 irreducibilis K fölött, akkor tetszőleges $v \in V$-re a v és vA által generált altér A-invariáns (ui. $vA^2 = -v - vA$), és ennek már nincs A-invariáns altere, mert akkor A-nak lenne sajátvektora. Tehát ilyenkor $\dim V = 2$, és ilyen reprezentáció valóban létezik: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Több irreducibilis reprezentáció nem lehet, mert $1 + 2 = \dim \mathbb{C}C_3$.

3 karakterisztikájú K test esetén KC_3 minimális részmodulusa csak olyan $x+ya+za^2$ elemekből állhat (ahol $C_3 = \langle a \rangle$), amelyekre $(x+ya+za^2)a = z+xa+ya^2 = x+ya+za^2$, azaz $x = y = z$, mert KC_3 egyetlen irreducibilis modulusa a triviális modulus. Tehát $M_1 = \{\, \lambda(1+a+a^2) \mid \lambda \in K \,\}$ az egyetlen minimális részmodulus KC_3-ban, efölött maximális modulus pedig szintén csak egy van, ugyanis csak olyan u elemek lehetnek benne, amelyekre $ua - u \in M_1$, hogy M_2/M_1 triviális egyszerű modulus legyen, és ilyenek csak azok az $x+ya+za^2$ elemek, amelyekre $x+y+z = 0$.

4. *Adjuk meg $C_2 \times C_2$ irreducibilis reprezentációit egy tetszőleges K test fölött!*

Megoldás: $C_2 \times C_2$ homomorfizmusait $GL(V)$-be megadja a két komponens generátorelemének homomorf képe, A és B, azaz olyan mátrixpár, amelyre $A^2 = B^2 = I$ és $AB = BA$. A és B minimálpolinomja osztója $x^2 - 1$-nek, tehát mindenképpen van K-ban sajátértékük. Legyen V_1 az A-nak egy sajátaltere. $AB = BA$ miatt ez B-invariáns: $vA = \lambda v$ esetén $(vB)A = v(BA) = v(AB) = (vA)B = \lambda vB$. Ebben B-nek van sajátvektora is, ismét a $B^2 = I$ feltétel miatt, tehát van A-nak és B-nek közös sajátvektora, azaz V-nek egydimenziós $C_2 \times C_2$-invariáns altere. Így az irreducibilis reprezentáció csak egydimenziós lehet, azaz $\mathbb{C}^\times$-be vezető homomorfizmus. Ez mindkét generátor elemet 1-be vagy -1-be viheti, és ezek valóban homomorfizmust adnak, tehát $\operatorname{char} K = 2$ esetén egyetlen, egydimenziós irreducibilis reprezentáció van, minden más esetben négy.

5. *Bizonyítsuk be, hogy egy Abel-csoportnak minden $\mathbb{C}$ fölötti irreducibilis reprezentációja lineáris! Mi a helyzet tetszőleges test fölött?*

Megoldás: A lineáris reprezentációk nyilvánvalóan irreducibilisek. Ha a G Abel-csoportot felbontjuk $n_1, \ldots, n_k$ rendű ciklikusok direkt szorzatára, és az i-edik generátorelemet egy tetszőleges n_i-edik komplex egységgyökbe képezzük, ez nyilván kiterjeszthető egy $\mathbb{C}^\times$-be menő csoporthomomorfizmussá, és így $n_1 n_2 \cdots n_k = |G|$ különböző lineáris reprezentációt kapunk (ezek nyilvánvalóan nem is hasonlók egymáshoz). Mivel az irreducibilis reprezentációk fokainak a négyzetösszege $|G|$, ezen kívül G-nek már nem is lehet irreducibilis reprezentációja.

Ez más test fölött nem feltétlenül igaz, például C_3-nak $\mathbb{Z}_2$ fölött van másodfokú irreducibilis reprezentációja (ld. a 3. feladat megoldását). Algebrailag zárt test fölött viszont mindig lineárisak az irreducibilis karakterek, ugyanis tetszőleges elemnek van sajátértéke, és az ehhez tartozó sajátaltér a vele felcserélhető elemekre, tehát az egész csoportra nézve invariáns, így az irreducibilitásból következik, hogy a sajátaltér a teljes vektortér. Mivel ez minden elemre igaz, a vektortér egy tetszőleges egydimenziós altere is G-invariáns, így a vektortér csak 1-dimenziós lehet. Viszont a lineáris karakterek száma lehet ekkor is kisebb a G elemszámánál, ha a karakterisztika osztja a csoport rendjét.

6. *Adjuk meg S_4-nek egy 3-dimenziós valós irreducibilis reprezentációját, és határozzuk meg ennek a reprezentációnak a karakterét.*

Megoldás: A szabályos tetraéder egybevágósági csoportja S_4, és ha egy ilyen tetraéder középpontját az origóba tesszük, akkor az egybevágóságai a 3-dimenziós valós téren lineáris transzformációk lesznek. Vegyük fel azt a bázist, amelynek elemei az origóból a tetraéder három csúcsába mutató vektorok (ekkor a negyedik csúcsba mutató vektor ezek összegének ellentettje, mert az átlaguk $\mathbf{0}$ kell, hogy legyen). Ebben felírva minden konjugáltosztályból egy transzformációt, a következő mátrixokat kapjuk (a permutációknak az a transzformáció felel meg, amelyik a négy csúcsot az adott permutáció szerint permutálja, és a három bázisvektor az első három csúcs helyvektora):

$$X(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad X((12)(34)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad X((123)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X((12)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad X((1234)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Így $\chi(1) = 3$, $\chi((12)(34)) = -1$, $\chi((123)) = 0$, $\chi((12)) = 1$, $\chi((1234)) = -1$.

7. *Bizonyítsuk be, hogy egy irreducibilis karakternek és egy lineáris karakternek a szorzata mindig irreducibilis.*

Megoldás: Legyen $\chi \in \operatorname{Irr} G$ és λ lineáris. Ekkor $[\lambda\chi, \lambda\chi] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \lambda(g)\chi(g)\overline{\lambda(g)\chi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\lambda(g)|^2 |\chi(g)|^2$. De $\lambda(g)$ egységgyök, így $|\lambda(g)|^2 = 1$, és ezért az utóbbi összeg $[\chi, \chi] = 1$.

8. *Határozzuk meg A_4 és S_4 karaktertábláját.*

Megoldás: A_4-nek a kommutátor részcsoportja a 4-elemű Klein-csoport, így három lineáris karaktere van, ami az $A_4/A_4' \cong C_3$ karaktereinek felel meg: a harmadrendű elem tetszőleges harmadik egységgyökbe képződhet, az inverze pedig ennek konjugáltjába. Az egyetlen nem lineáris karaktert ezután az ortogonalitási relációk segítségével is kiszámíthatjuk, de megkaphatjuk úgy is, mint S_4 már ismert (valamelyik) 3-adfokú irreducibilis reprezentációjának A_4-re való megszorítottját. A karaktertáblában ε primitív harmadik egységgyök.

A_4	1	(..)(..)	$(123)^G$	$(321)^G$
	1	1	1	1
	1	1	ε	$\bar{\varepsilon}$
	1	1	$\bar{\varepsilon}$	ε
	3	-1	0	0

S_4-nek öt konjugáltosztálya, így öt irreducibilis karaktere van. Ebből ismerjük a két lineáris karaktert, továbbá a 6. feladatban megadott harmadfokú karaktert. Ez utóbbinak a nem triviális lineáris karakterrel vett szorzata megadja a negyedik irreducibilis karaktert (a 7. feladat szerint ez is irreducibilis), az ötödik (másodfokú) karaktert pedig már ortogonalitással kiszámolhatjuk. Így a karaktertábla

S_4	$1^{\,1}$	$(..)(..)^{\,3}$	$(...)^{\,8}$	$(..)^{\,6}$	$(....)^{\,6}$
	1	1	1	1	1
	1	1	1	-1	-1
	3	-1	0	1	-1
	3	-1	0	-1	1
	2	2	-1	0	0

9. *Bizonyítsuk be, hogy egy nemtriviális csoport karaktertáblájának minden sorában és minden oszlopában legalább két nemnulla szám van.*

Megoldás: A triviális karakter sorára nyilván igaz ez. Ha $1_G \neq \chi \in \operatorname{Irr} G$, akkor $0 = [\chi, 1_G] = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} \chi(g) = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{i=1}^{k} |\mathcal{K}_i|\, \chi(g_i)$, és $\mathcal{K}_1 = \{\, 1 \,\}$ esetén $\chi(g_1) \neq 0$, így van másik konjugáltosztály is, amelynek g_i reprezentáns elemére $\chi(g_i) \neq 0$.

Az 1-nek az oszlopa a karakterek fokait tartalmazza: ezek nem nullák, $g \neq 1$-re pedig $\sum\limits_{i=1}^{k} \chi_i(g)\chi_i(1) = 0$, és a tagok közül $1_G(g)1_G(1) \neq 0$, így van még egy nem nulla tag.

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy egy 28 elemű nem kommutatív csoportnak van másodfokú irreducibilis reprezentációja $\mathbb{C}$ fölött.*

Hf2. *Egészítsük ki a következő táblázatot, ha tudjuk, hogy ez egy véges csoport karaktertáblája (vegyük figyelembe, hogy a sorok és oszlopok esetleg nem a megszokott sorrendben vannak, tehát az 1 elemhez tartozó oszlop nem feltétlenül az első, és a triviális karakter nem feltétlenül az első sorba került)! Mekkora a csoport rendje, konjugáltosztályainak mérete, milyen rendű normálosztói vannak? Mekkora a csoport centruma?*

1		1	-1		1	
1					-1	1
		1	-1			1
			0	0		-2
2		-2	0		$-i\sqrt{2}$	0
2	0		0			0