1. *Bizonyítsuk be a Burnside-lemmát: ha $\varphi : G \to S_n$ a G csoportnak egy n elemű halmazon való csoporthatása, akkor G elemei fixpontszámának átlaga megegyezik az orbitok számával.*

Megoldás: Számoljuk meg kétféleképpen a $\mathcal{H} = \{(g,i) \,|\, ig = i\}$ halmaz elemszámát. A csoportelemek szerint csoportosítva ez $\sum_{g\in G} |Fix(g)|$, az alaphalmaz elemei szerint csoportosítva pedig a stabilizátorok elemszámának az összege. De egy i elem stabilizátorának elemszáma $|G|/|iG|$, ahol iG az i orbitja, tehát ha ezeket még tovább csoportosítjuk az orbitok szerint, akkor minden orbitra $|G|$ egy példányát adjuk össze, így az elemszám az orbitok számának $|G|$-szerese. A két eredmény egyenlőségéből rörtön adódik az állítás.

2. *Bizonyítsuk be, hogy 1_G mindig szerepel egy permutációs karakter irreducibilis összeadandói között. Mennyi az 1_G együtthatója?*

Megoldás: Egy csoporthatáshoz tartozó permutációs karakter értéke egy adott elemen az adott csoportelem fixpontjainak a száma, így az 1_G-vel való skalárszorzat a fixpontok átlaga. Ez a Burnside-lemma szerint éppen az orbitok száma. Így tranzitív csoporthatásnál az 1_G egyszer szerepel a permutációs karakterben, és általában a multiplicitása az orbitok száma.

3. *Bizonyítsuk be, hogy egy 2-tranzitív csoporthatás által megadott χ permutációs karakterre $\chi - 1_G$ irreducibilis karakter.*

Megoldás: Egy csoporthatás 2-tranzitív, ha bármely, két különböző elemből álló rendezett elempárt el tud vinni bármely másik ilyen párba. Ebből következik, hogy a csoporthatás tranzitív is, tehát a Burnside-lemma miatt a fixpontok átlaga 1, azaz $[\chi, 1_G] = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)| = 1$, és így $\chi - 1_G$ is karakter. Ha pedig a $[\chi,\chi] = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)|^2$ skalárnégyzetet számoljuk ki, ez nem más, mint a csoport rendezett elempárokon való hatásának fixpontátlaga, és az utóbbinak két orbitja van: az azonos elemből álló párok, és a különböző elemekből állók. Tehát $[\chi,\chi] = 2$, amiből $[\chi - 1_G, \chi - 1_G] = [\chi,\chi] - 2[\chi, 1_G] + [1_G, 1_G] = 2 - 2 + 1 = 1$, ezért $\chi_i - 1_G$ irreducibilis karakter.

4. *Bizonyítsuk be, hogy egy G Abel-csoport karaktertáblájában egy elem rendje megegyezik az oszlopában szereplő komplex egységgyökök rendjének a maximumával.*

Megoldás: Mivel az Abel-csoport minden irreducibilis karaktere lineáris, a karakterek egyúttal reprezentációk is, sőt, ha minden $g \in G$ elemnek megfeleltetjük az oszlopát mint a $\mathbb{C}^\times$ $|G|$ példányban vett direkt szorzatának egy elemét, akkor így csoporthomomorfizmust kapunk. Ennek a magja triviális, mert különben lenne két csupa egyesből álló oszlop, amelyek így nem lennének merőlegesek egymásra. Tehát G izomorf a képével, és $g \in G$ rendje megegyezik a kép rendjével, ami az oszlopban szereplő komplex egységgyökök rendjének legkisebb közös többszöröse. Mivel lineáris karakterek szorzata is lineáris karakter, az oszlopok elemei részcsoportot alkotnak a $\mathbb{C}^\times$ $o(g)$-edik egységgyökei által alkotott ciklikus csoportban, itt pedig a rendek legkisebb többszöröse egyúttal a legnagyobb elemrend, tehát $o(g)$ rendű egyszéggyök is szerepel g oszlopában.

5. *Bizonyítsuk be, hogy két Abel-csoport karaktertáblája pontosan akkor egyezik meg, ha a csoportok izomorfak.*

Megoldás: Az előző feladat megoldásából láthatjuk, hogy G izomorf a karaktertábla oszlopai mint $\mathbb{C}^\times$ direkt hatványának elemei által alkotott csoporttal, tehát az Abel-csoport karaktertáblája izomorfia erejéig meghatározza a csoportot.

6. *Bizonyítsuk be, hogy ha $H \le K \le G$, és φ osztályfüggvénye H-nak, akkor $(\varphi^K)^G = \varphi^G$.*

Megoldás:

$$(\varphi^K)^G(g) = \frac{1}{|K|}\sum_{x\in G}(\varphi^K)^\circ(xgx^{-1}) = \frac{1}{|K|}\sum_{\substack{x\in G\\ xgx^{-1}\in K}}(\varphi^K)(xgx^{-1}) =$$

$$\frac{1}{|K||H|}\sum_{\substack{x\in G\\ xgx^{-1}\in K}}\sum_{y\in K}\varphi^\circ(yxgx^{-1}y^{-1}) = \frac{1}{|K||H|}\sum_{y\in K}\sum_{\substack{x\in G\\ (yx)g(yx)^{-1}\in K}}\varphi^\circ(yxgx^{-1}y^{-1}) =$$

$$\frac{1}{|K||H|}\cdot|K|\sum_{z\in G}\varphi^\circ(zgz^{-1}) = \varphi^G(g).$$

Egy másik megoldás a Frobenius-reciprocitással:
Minden $\chi_i \in \operatorname{Irr} G$-re $[(\varphi^K)^G, \chi_i] = [\varphi^K, (\chi_i)_K] = [\varphi, ((\chi_i)_K)_H] = [\varphi, (\chi_i)_H] = [\varphi^G, \chi_i]$, tehát $(\varphi^K)^G$-nek és φ^G-nek az irreducibilis karakterek lineáris kombinációjaként való előállításában ugyanazok az együtthatók, azaz $(\varphi^K)^G = \varphi^G$.

7. *Legyen $H, K \le G$ úgy, hogy $HK = G$, és legyen φ osztályfüggvény a H csoporton. Bizonyítsuk be, hogy $(\varphi^G)_K = (\varphi_{H\cap K})^K$.*

Megoldás: $u \in K$-ra $\varphi^G(u) = \frac{1}{|H|}\sum\limits_{x\in G}\varphi^\circ(xux^{-1})$. Legyen $\{h_1, \dots, h_r\} \subseteq H$ a K szerinti bal mellékosztályok egy reprezentánsrendszere, ahol $r = |G : K|$. Ekkor az előbbi összeg átírható: $\frac{1}{|H|}\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{v\in K}\varphi^\circ(h_ivuv^{-1}h_i^{-1}) = \frac{|G:K|}{|H|}\sum\limits_{v\in K}\varphi^\circ(vuv^{-1})$, és ez tovább $= \frac{|G:K|}{|H|}\sum\limits_{v\in K}\varphi^\circ_{H\cap K}(vuv^{-1})$, ugyanis $vuv^{-1} \in H \Leftrightarrow vuv^{-1} \in H\cap K$. De $|G:K|/|H| = |G|/(|K|\cdot|H|) = 1/|H\cap K|$, mivel $|G| = |HK| = |H|\cdot|K|/|H\cap K|$, tehát a kapott összeg éppen $(\varphi_{H\cap K})^K(u)$.

8. *Határozzuk meg S_5 és A_5 karaktertábláját.*

Megoldás: $G = S_5$-nek hét konjugáltosztálya van: 1, (..)(..), (...), (.....), (..), (....), (...)(..), amelyeknek az elemszáma rendre $1, 15, 20, 24, 10, 30, 20$. Az 5 elemű Young-diagramokhoz tartozó partíciók lexikografikus sorrendben $5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1$. Számítsuk ki az ezekhez tartozó $\chi_1, \dots, \chi_7$ irreducibilis karaktereket! A χ_1 és χ_7 lineáris karaktereket eleve ismerjük, és tudjuk, hogy a transzponált diagramhoz tartozó irreducibilis karakter az eredetinek χ_7-szerese, így elég a χ_2, χ_3 és χ_4 karaktereket meghatározni. Az $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz $4+1$ alakú partícióin vett csoporthatáshoz tartozó φ_2 karakter értékei (azaz a konjugáltosztályok egy-egy reprezentáns elemének fixpontszáma): $(5, 1, 2, 0, 3, 1, 0)$. Ebben (mint minden tranzitív permutációs karakterben) 1-szer szerepel az 1_G, és a $\chi_2 = \varphi_2 - 1_G$ karakter irreducibilis, mert a skalárnégyzete 1. A 3+2 partíciókon való csoporthatáshoz tartozó $\varphi_3 : (10, 2, 1, 0, 4, 0, 1)$. $[\varphi_3, 1_G] = [\varphi, \chi_2] = 1$, és $\chi_3 = \varphi_3 - 1_G - \chi_2$ már irreducibilis. Végül a $3+1+1$ alakú partíciókon (ahol a halmazok sorrendje is számít!) való hatásból a $\varphi_4 : (20, 0, 2, 0, 6, 0, 0)$ karaktert kapjuk, amelyre $[\varphi_4, 1_G] = [\varphi_4, \chi_3] = 1$ és $[\varphi_4, \chi_2] = 2$, és $\chi_4 = \varphi_4 - 1_G - 2\chi_2 - \chi_3$ irreducibilis. A többi irreducibilis karaktert megkapjuk a meglevőknek a χ_7 lineáris karakterrel való szorzásával.

S_5	$1^{\ 1}$	$(..)(..)^{\ 15}$	$(...)^{\ 20}$	$(.....)^{\ 24}$	$(..)^{\ 10}$	$(....)^{\ 30}$	$(..)(...)^{\ 20}$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_7	1	1	1	1	-1	-1	-1
χ_2	4	0	1	-1	2	0	-1
χ_3	5	1	-1	0	1	-1	1
χ_4	6	-2	0	1	0	0	0
χ_5	5	1	-1	0	-1	1	-1
χ_6	4	0	1	-1	-2	0	1

$G = A_5$-nek öt konjugáltosztálya van: $\{1\}$, $\{(..)(..)\}$, $\{(...)\}$, $(12345)^G$, és $(13524)^G$, az elemszámuk rendre $1, 15, 20, 12, 12$. Az S_5 irreducibilis karaktereinek az A_5-re való megszorításával megkapunk három irreducibilis karaktert. A hiányzó kettőhöz tekintsük a $g = (12345)$ elem által generált ötödrendű H részcsoportnak egy nem triviális karakterét: $\lambda(g) = \omega$, ahol ω primitív ötödik egységgyök. A λ^G indukált karakter értékei G konjugáltosztályain: $(12, 0, 0, \omega + \omega^4, \omega^2 + \omega^3)$. Ennek a skalárszorzata χ_2-vel és χ_3-mal 1, és $\lambda^G - \chi_2 - \chi_3$-nek a skalárnégyzete 1, így $\chi_4 = \lambda^G - \chi_2 - \chi_3$ egy újabb irreducibilis karakter. Az ötödiket megkaphatjuk ortogonalitási relációkból vagy az előző mintájára a λ^2 karakter indukálásával. Az 5. egységgyököket ki is számíthatjuk, és ebből $\chi_4((12345)) = 1 + \omega + \omega^4 = (1 + \sqrt{5})/2$ és $\chi_4(g^2) = 1 + \omega^2 + \omega^3 = -\omega - \omega^4 = (1 - \sqrt{5})/2$, ha ω-nak a $\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$-öt vesszük.

S_5	$1^{\ 1}$	$(..)(..)^{\ 15}$	$(...)^{\ 20}$	$(.....)_1^{12}$	$(.....)_2^{12}$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	4	0	1	-1	-1
χ_3	5	1	-1	0	0
χ_4	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ_4	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

9. *Bizonyítsuk be, hogy egy G absztrakt csoport akkor és csak akkor Frobenius-csoport, ha G beágyzható egy S_Ω szimmetrikus csoportba úgy, hogy G az Ω-n nem reguláris Frobenius-csoportként hasson.*

Megoldás: Tegyük fel, hogy G Frobenius-féle permutációcsoport, és egy $\omega \in \Omega$ elemre H az ω stabilizátora. A feltevés miatt, hogy G nem reguláris, $H \neq 1$, és a tranzitivitás miatt

$H \neq G$. Továbbá minden $g \in G \setminus H$ elemre $\omega g \neq \omega$, és így $H \cap H^g = G_\omega \cap G_{\omega g} = 1$, minthogy nem triviális elemnek nem lehet egyszerre ω és ωg is fixpontja.

Most tegyük fel, hogy G absztrakt Frobenius-csoport H komplementummal. Tekintsük G hatását a jobbszorzással H jobb oldali mellékosztályain. Ha Hx fixpontja egy g elemnek, akkor $Hxg = Hx$, azaz $Hxgx^{-1} = H$, vagyis $g \in H^x$. Ha g-nek $Hx \neq Hy$ is fixpontjai, akkor $g \in H^x \cap H^y$, azaz $g^{x^{-1}} \in H \cap H^{yx^{-1}} = 1$, így $g = 1$. Ez azt jelenti, hogy semelyik nem triviális elemnek nem lehet egynél több fixpontja, és egyúttal azt is bizonyítja, hogy a csoporthatás hűséges (felhasználva, hogy $H \neq G$, tehát egy mindent fixen hagyó elemnek van két különböző fixpontja), vagyis a G homomorfizmusa a H mellékosztályain ható szimmetrikus csoportba beágyazás. Mivel $H \neq 1$, a kapott Frobenius-féle permutációcsoport nem reguláris.

Hf1. *Bizonyítsuk be, hogy ha $G \leq S_n$ 4-tranzitív permutációcsoport, és χ a G-nek az $\{1, 2, \ldots, n\}$ 2-elemű részhalmazain való hatásához tartozó permutációs karakter, akkor χ három különböző irreducibilis karakter összege.*

Hf2. *Az S_4 csoport karaktertáblája alapján*

S_4	1	(..)(..)	(...)	(..)	(....)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	2	2	-1	0	0
χ_4	3	-1	0	1	-1
χ_5	3	-1	0	-1	1

írjuk fel a két harmadfokú karakter szorzatát irreducibilis karakterek összegeként.

Hf3. *Bizonyítsuk be, hogy ha $H \leq G$, és φ karakter H-n, akkor $Z(\varphi^G) \leq Z(\varphi)$.*