1. *Bizonyítsuk be, hogy egy Frobenius-csoportban a mag és a komplementum relatív prím rendűek.*

Megoldás: Hattassuk a H komplementumot az N normálosztón a konjugálással. Ekkor a H nem triviális elemeinek nincs fixpontja $N \setminus \{1\}$-en, ugyanis ha $h^{-1}xh = x$, azaz $x^{-1}hx = h$ valamely $1 \neq h \in H$ és $1 \neq x \in N$-re, akkor $h \in H \cap H^x$, ami ellentmond annak, hogy G Frobenius-csoport. Ebből következik, hogy H minden, az $\{1\}$-től különböző orbitja N-en $|H : C_H(x)| = |H|$ elemszámú, tehát $|H|$ osztója $|N| - 1$-nek, és így $|H|$ és $|N|$ relatív prímek.

2. *Legyen $G = HN$ egy csoport, ahol $H \leq G$, $N \lhd G$ és $H \cap N = 1$. Bizonyítsuk be, hogy G akkor és csak akkor Frobenius-csoport H komplementummal és N maggal, ha minden $1 \neq x \in N$-re $C_G(x) \leq N$.*

Megoldás: $\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy egy $1 \neq x \in N$-re $C_G(x) \not\leq N$. Ekkor van olyan $g \in G \setminus N$, hogy $[x, g] = 1$. Mivel $G \setminus N = \cup_{y \in G}(H^y \setminus \{1\})$, valamely y-ra $g \in H^y$. Az x, g elempárt y^{-1}-gyel megkonjugálva azt kapjuk, hogy olyan x, g is létezik, amelyekre $g \in H$, $x \in N$, és továbbra is $[x, g] = 1$. Ekkor viszont $1 \neq g \in H^x \cap H$, miközben $x \notin H$, ellentmondva a Frobenius-csoport definíciójának.

$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy valamely $y \notin H$-ra $1 \neq h \in H \cap H^y$. A $G = HN$ feltevés miatt $y = gx$ alakú, ahol $g \in H$ és $x \in N$, és erre $H^y = H^{gx} = H^x$. Tehát $h = x^{-1}h'x$ valamely $h' \in H$-ra, amiből $[h', x] = (h')^{-1}x^{-1}h'x = (h')^{-1}h \in H \cap N = 1$, vagyis $h' \in C_G(x) \setminus N$, ellentmondva a feltevésnek. Így megkaptuk, hogy G Frobenius-csoport H Frobenius-komplementummal. Másrészt minden $g \in G$-re $N \cap H^g = N^g \cap H^g = (N \cap H)^g = 1^g = 1$, így $N \subseteq (G \setminus \cup_{g \in G}(H^g \setminus \{1\})$. Viszont $|(G \setminus \cup_{g \in G}(H^g \setminus \{1\})| = |G| - |G : H| \cdot (|H| - 1) = |G : H| = |N|$, tehát N a Frobenius-mag.

3. *Legyen χ a G csoport egy karaktere. Definiáljuk a $\det \chi : G \to \mathbb{C}^\times$ leképezést a $(\det \chi)(g) = \det X(g)$ összefüggéssel, ahol χ az X reprezentáció karaktere. Bizonyítsuk be, hogy $\det \chi$ jól definiált lineáris karakter.*

Megoldás: Ha X és Y ugyanazt a χ karaktert adják, akkor ekvivalensek, azaz $Y(g) = P^{-1}X(g)P$ valamely P-re, és $\det P^{-1}X(g)P = \det X(g)$. $\det X$ valóban reprezentáció, mert $\det X(gh) = \det X(g)X(h) = \det X(g) \cdot \det X(h)$, és mivel $\mathbb{C}^\times$-ba képez, $\det \chi$ lineáris.

4. *Bizonyítsuk be, hogy egyszerű csoportnak nem lehet másodfokú irreducibilis karaktere. (Használjuk az előző feladatot!)*

Megoldás: Abel-csoportra igaz az állítás, tehát feltehetjük, hogy G nem kommutatív egyszerű csoport, következésképpen minden nem triviális karakter centruma triviális. Tegyük fel, hogy $\chi \in \operatorname{Irr} G$, és $\chi(1) = 2$. Mivel $\chi(1) \mid |G|$, G páros rendű, és így van másodrendű g eleme. $X(g) \sim \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}$, ahol $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ második egységgyökök, tehát vagy $\chi(g) = \pm 2$, és akkor $Z(\chi) > 1$, ami ellentmond G egyszerűségének, vagy $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = \{1, -1\}$, és akkor $\det \chi$ nem triviális lineáris karakter, így $G' < G$, és ez megint ellentmond annak, hogy G nem Abel egyszerű csoport.

5. *Tegyük fel, hogy G-nek van olyan hűséges komplex reprezentációja, amelynek foka kisebb a $|G|$ legkisebb prímosztójánál. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G Abel-csoport.*

Megoldás: χ felírható irreducibilis karakterek összegeként, amelyeknek foka osztója $|G|$-nek, így a feltétel miatt csak lineárisak lehetnek: $\chi = \sum \lambda_i$. De $1 = \operatorname{Ker} \chi \geq \bigcap \operatorname{Ker} \lambda_i \geq G'$, így $G' = 1$, azaz G Abel.

6. *Bizonyítsuk be, hogy ha $K, H \leq G$, $\psi \in \operatorname{Irr} H$, és $(\psi^G)_K$ irreducibilis, akkor $G = HK$. (Útmutatás: Lássuk be, hogy $[(\psi^G)_K, (\psi_{H\cap K})^K] \neq 0$.)*

Megoldás: $[(\psi^G)_K, (\psi_{H\cap K})^K] = [((\psi^G)_K)_{H\cap K}, \psi_{H\cap K}] = [(\psi^G)_{H\cap K}, \psi_{H\cap K}] = [((\psi^G)_H)_{H\cap K}, \psi_{H\cap K}] \neq 0$, mert $[(\psi^G)_H, \psi] = [\psi, \psi] \neq 0$ és $\psi \in \operatorname{Irr} H$ miatt ψ direkt összeadandója $(\psi^G)_H$-nak, és így a $H \cap K$-ra való megszorítottjaikra is igaz ez. Mivel $(\psi^G)_K$ irreducibilis, ebből következik, hogy $(\psi^G)_K$ direkt összeadandója $(\psi_{H\cap K})^K$-nak, és így $|G : H|\psi(1) = \psi^G(1) = (\psi^G)_K(1) \leq (\psi_{H\cap K})^K(1) = |K : (H \cap K)|\psi(1)$, amiből $|G| \leq |H||K|/|H \cap K| = |HK|$, tehát $G = HK$.

7. *Legyen G egyszerű, $\chi \in \operatorname{Irr} G$, $\chi(1) = p$ prím. Bizonyítsuk be, hogy G p-Sylowja p elemű. (Útmutatás: Ha a p-Sylow nem Abel, akkor $Z(P) \leq Z(\chi)$.)*

Megoldás: A $\chi(1) = p$ feltevés miatt $|G|$ osztható p-vel, tehát G-nek nem triviális p-Sylowja van, legyen ez P. Ha χ_P irreducibilis, akkor $1 \neq Z(P) \leq Z(\chi_P) \leq Z(\chi)$, de az utóbbi G egyszerűsége miatt triviális, ez ellentmondás.

Tehát χ_P nem irreducibilis, és így minden irreducibilis komponensének foka p-nél kisebb, másrészt osztója $|P|$-nek, tehát csak 1 lehet: $\chi_P = \sum \lambda_i$ lineáris karakterek összege. Viszont G egyszerűsége miatt χ, és így χ_P is hűséges, tehát $1 = \operatorname{Ker} \chi_P \geq \cap \operatorname{Ker} \lambda_i \geq P'$, ezért P Abel-csoport.

Minden $1 \neq x \in P$-re $C_G(x) \geq P$ miatt $p \not| |\mathcal{K}(x)|$ és $Z(\chi) = 1$, így a Burnside-tétel miatt $\chi(x) = 0$. Ezért $\chi_P = a \cdot \rho = a \cdot \sum_{\varphi_i \in \operatorname{Irr} P} \varphi_i$ valamely $a > 0$-ra, így $[\chi_P, \varphi_i] = a \neq 0$ minden i-re, tehát $\chi_P(1) = a \cdot |\operatorname{Irr} P| \geq |\operatorname{Irr} P|$. Viszont $\chi_P(1) = p$, ezért $p \geq |\operatorname{Irr} P| = |P|$, következésképpen $|P| = p$.

Hf1. *a) Bizonyítsuk be, hogy ha A Abel-csoport és χ karaktere A-nak, akkor $[\chi, \chi] \geq \chi(1)$.*
b) Legyen $A \leq G$, A Abel-csoport, $\chi \in \operatorname{Irr} G$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(1) \leq |G : A|$.

Hf2. *Tegyük fel, hogy $A \leq G$ Abel részcsoport, és $|G : A|$ prímhatvány. Bizonyítsuk be, hogy $G' < G$.*