1. *Bizonyítsuk be, hogy ha G valamely automorfizmusa minden karaktert helyben hagy, akkor minden konjugáltosztályt is helyben hagy.*

Megoldás: Legyen $\mathcal{K}$ egy konjugáltosztály, és tegyük fel, hogy a σ automorfizmus minden karaktert helyben hagy. Ekkor $g \in \mathcal{K}$, $\chi \in \operatorname{Irr} G$-re $\chi(g) = \chi^\sigma(g^\sigma) = \chi(g^\sigma)$, tehát $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}^\sigma$ oszlopa megegyezik a karaktertáblában. Az ortogonalitási relációk miatt ebből következik, hogy $\mathcal{K} = \mathcal{K}^\sigma$.

2. *Bizonyítsuk be, hogy $H \lhd G$-re a H-beli G-konjugáltosztályok száma megegyezik az $\operatorname{Irr} H$ G-konjugáltosztályainak számával.*

Megoldás: Legyen $d = \dim_C \langle \{ \chi_H \mid \chi \in \operatorname{Irr} G \} \rangle$, k a G csoport H-ban levő konjugáltosztályainak a száma, t pedig $\operatorname{Irr} H$ konjugáltosztályainak száma a G-re nézve. Mivel $\operatorname{Irr} G$ kigenerálja G összes osztályfüggvényét, a χ_H-k kigenerálják az összes olyan $H \to \mathbb{C}$ függvényt, amelyek a H-beli G-konjugáltosztályokon konstansok. Tehát $d = k$. Másrészt a Clifford-tétel miatt minden χ irreducibilis G-karakter megszorítottja $\chi_H = e \cdot \sum \varphi_i$ alakú, ahol $\{ \varphi_i \}$ az $\operatorname{Irr} H$ egy konjugáltosztálya, és minden $\sum \varphi_i$-nek előáll valamely skalárszorosa egy $\chi \in \operatorname{Irr} G$ megszorítottjaként (az a χ jó, amelyre $[\varphi_i^G, \chi] \neq 0$), továbbá a különböző konjugáltosztályokhoz tartozó összegek lineárisan függetlenek, így $d = t$.

3. *Legyen $H \lhd G$, és $\varphi \in \operatorname{Irr} H$. Bizonyítsuk be, hogy $\varphi^G \in \operatorname{Irr} G$ akkor és csak akkor, ha $H = I_G(\varphi) := \{ g \in G \mid \varphi^g = \varphi \}$.*

Megoldás: A Clifford-tételből következik, hogy minden $\varphi \in \operatorname{Irr} H$-ra $(\varphi^G)_H = e \cdot \sum_{i=1}^{r} \varphi_i$, ahol a $\{ \varphi_i \}$ konjugáltosztály mérete $r = |G : I_G(\varphi)|$, és $|G : H|\varphi(1) = (\varphi^G)_H(1) = e \cdot \sum \varphi_i(1) = er\varphi(1)$ miatt $er = |G : H|$, következésképpen $|I_G(\varphi)| = e \cdot |H|$. Nyilván $H \leq I_G(\varphi)$, így $H = I_G(\varphi)$ akkor és csak akkor, ha $e = 1$. Mivel $[\varphi^G, \varphi^G] = [(\varphi^G)_H, \varphi] = e$, a φ^G karakter akkor és csak akkor irreducibilis, ha $e = 1$, azaz ha $H = I_G(\varphi)$.

4. *Legyen $H \lhd G$, $\chi \in \operatorname{Irr} G$, $\varphi \in \operatorname{Irr} H$, $[\chi_H, \varphi] = e \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy a következő három állítás ekvivalens:*

(i) $\chi_H = e\varphi$, $e^2 = |G : H|$;

(ii) $\chi|_{G \setminus H} \equiv 0$, *és φ invariáns G-ben;*

(iii) χ *a φ^G egyetlen irreducibilis összeadandója, és φ invariáns G-ben.*

Megoldás: A Clifford-tételből következik, hogy $\chi_h = e\varphi$ akkor és csak akkor igaz, ha φ invariáns G-ben, tehát csak az *(i)*, *(ii)* és *(iii)* másik feltételének az ekvivalenciáját kell bizonyítani az a feltétel mellet, hogy $\chi_H = e\varphi$.

(i) $\Leftrightarrow$ *(ii)*: $1 = [\chi, \chi] = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 \geq \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in H} |\chi(g)|^2 = \dfrac{1}{|G : H|} \cdot \dfrac{1}{|H|} \sum_{g \in H} |\chi_H(g)|^2 = \dfrac{1}{|G : H|}[e\varphi, e\varphi] = \dfrac{e^2}{|G : H|}$. Tehát $e^2 = |G : H|$ akkor és csak akkor teljesül, ha a fenti egyenlőtlenségben egyenlőség van, azaz ha $\chi(g) = 0$ minden $g \in G \setminus H$-ra.

(i) $\Leftrightarrow$ *(iii)*: $[\varphi^G, \chi] = [\varphi, \chi_H] = e$ miatt $e\chi$ direkt összeadandója φ^G-nek, így $|G : H| \cdot \varphi(1) = \varphi^G(1) \geq e \cdot \chi(1) = e \cdot \chi_H(1) = e^2\varphi(1)$, és ebből $|G : H| = e^2$ akkor és csak akkor teljesül, ha az egyenlőtlenségben egyenlőség van, azaz ha $\varphi^G = e\chi$.

5. *Tegyük fel, hogy G-nek egyetlen nem lineáris irreducibilis karaktere van. Bizonyítsuk be, hogy G' Abel. (Útmutatás: Számítsuk ki a G reguláris karakterének megszorítását G'-re kétféleképpen.)*

Megoldás: Legyen ρ a G reguláris karaktere, χ az egyetlen nem lineáris irreducibilis karakter, és $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ a lineárisak. Ekkor $\rho = \chi(1)\chi + \sum_{i=1}^{t} \lambda_i$, amiből $\rho_{G'} = \chi(1)\chi_{G'} + \sum_{i=1}^{t} (\lambda_i)_{G'} = \chi(1)\chi_{G'} + t \cdot 1_{G'}$, ugyanis a lineáris karakterek magja tartalmazza G'-t. Másrészt $\rho_{G'}$ csak az 1-en vesz föl nem nulla értéket, tehát szükségképpen a G' reguláris karakterének skalárszorosa. Ebből következik, hogy $\rho_{G'}$ előállításában G' minden irreducibilis karaktere szerepel. A Clifford-tétel miatt $\chi_{G'}$ összeadandói az $\mathrm{Irr}\, G'$ egyetlen konjugáltosztályából valók: $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$, tehát $\mathrm{Irr}\, G' = \{\, \varphi_1, \ldots, \varphi_r, 1_{G'} \,\}$, ahol a φ_i-k mind azonos fokúak. A $|G'| = \varphi_i(1)^2 + \ldots + \varphi_r(1)^2 + 1 = r \cdot \varphi_1(1)^2 + 1$ összefüggésből $\varphi_1(1) \mid |G|$ miatt $\varphi(1) \mid 1$ következik, tehát a φ_i karakterek is lineárisak. Mivel G' minden irreducibilis karaktere lineáris, G' csak Abel-csoport lehet.

Hf1. *Legyen $H \triangleleft G$, $|G : H| = 2$, és $\chi \in \mathrm{Irr}\, G$. Bizonyítsuk be, hogy*
a) ha $\chi|_{G \setminus H}$ nem azonosan 0, akkor $\chi_H \in \mathrm{Irr}\, H$;
b) ha $\chi|_{G \setminus H} \equiv 0$, akkor χ_H két különböző irreducibilis karakter összege.

Hf2. *Legyen $H \triangleleft G$, $|G : H| = 2$, és $\varphi \in \mathrm{Irr}\, H$. Bizonyítsuk be, hogy φ^G vagy irreducibilis, vagy $\chi + \lambda\chi$ alakú, ahol $\chi \in \mathrm{Irr}\, G$, és λ az a lineáris karakter, amely H-n kívül -1-et, H-n belül 1-et vesz fel.*