NÉV: ______________________________

Gyűrűk és csop. repr. **1. zh** *2013. április 2.*

I. rész. *Ebben a részben minden helyes válasz 3 pontot ér. A választ a keretbe írjuk! Indokolni csak akkor kell, ha a feladat ezt kéri.*

1. *Adjunk meg olyan Abel-csoportot, amelynek a radikálja $\mathbb{Z}_6$-tal izomorf!*

2. *Definiáljuk egy modulus féligegyszerűségét, és adjunk meg két ezzel ekvivalens tulajdonságot!*

3. *Mutassunk olyan $\mathbb{Z}_4$-modulust, amely nem injektív és nem lokális! Röviden indokoljuk, hogy miért nem injektív!*

4. *Legyen* $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & & 1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$. *Válasszunk ki a következő nem 0 morfizmusok közül egyet, ami biztosan irreducibilis, és egyet, amelyik biztosan nem irreducibilis! Adjunk néhány szavas indoklást!*

   a) $1 \to \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}$ *b)* $\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & & 1\end{smallmatrix}$ *c)* $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$ *d)* $\begin{smallmatrix}2 & & 3\\ & 1 & \end{smallmatrix} \to 3$

5. *Mondjuk ki az R gyűrű (modulusként és gyűrűként való) direkt felbontásainak és idempotens elemeinek kapcsolatáról szóló tételt!*

6. *Mondjuk ki a Fitting-lemmát! Mutassunk példát a lemma valamelyik feltételének szükségességére!*

7. *Definiáljuk az Auslander–Reiten-sorozatot!*

8. *Az A algebráról tudjuk, hogy $A_A = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$ a felbonthatatlan projektív modulusok és $D({}_A A) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & 3 & \end{smallmatrix}$ a felbonthatatlan injektív modulusok összege. Adjuk meg a $\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$ modulus Auslander–Reiten-eltoltját!*

II. rész.

9. *Mondjuk ki és bizonyítsuk be egy modulus injektivitásának egyik ekvivalens feltételét!* (10 *pont*)

10. *Mondjuk ki és bizonyítsuk be a Harada–Sai-lemmát!* (16 *pont*)