1. Legyen $M \in$ Mod-R, azaz M jobb oldali R-modulus, B balideálja, J jobbideálja R-nek, $a \in M$ és U, V részmodulusok M-ben. Az alábbiak közül melyikek lesznek feltétlenül részmodulusai M-nek? (Az összegek komplexusösszegeket, a szorzatok a komplexusszorzat elemeiből alkotott összegek hamazát jelentik, $\mathrm{Ann}_M /(H)$ — $H \subseteq R$ annullátora M-ben — pedig az M azon elemeinek halmazát jelenti, amelyeket a H minden eleme 0-ba szoroz.)

a) aR b) aB c) aJ d) $U \cap V$ e) $U \cup V$
f) $U + V$ g) $\mathrm{Ann}_M(B)$ h) $\mathrm{Ann}_M(J)$ i) UB j) UJ.

2. a) Legyen $1 \in S \leq R$. Bizonyítsuk be, hogy minden R-modulus S-modulus is, de fordítva nem igaz.
b) Legyen $I \triangleleft R$. Mi a kapcsolat az R-modulusok és az R/I-modulusok között?

3. Hány részmodulusa van az alábbi modulusoknak, és azok hány izomorfiaosztályba tartoznak?
a) $\mathbb{R}^4$ mint $\mathbb{R}$-modulus.
b) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5$ mint $\mathbb{Z}$-modulus.
c) A 2-elemű test fölötti 3×3-as mátrixok gyűrűje, $\mathbb{F}_2^{3\times3}$, önmaga fölött.
d) $\mathbb{F}_2^{3\times3}$ mint a fölső háromszögmátrixok gyűrűje fölötti jobbmodulus.

4. Mi lehet a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_3$, illetve $\mathbb{Z}_6$ gyűrűk fölötti (unitér) modulusok additív csoportja? Izomorfia erejéig hány 15 elemű modulus van az egyes gyűrűk fölött?

5. Legyen $V = \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}$ fölötti n-dimenziós vektortér. Keressünk alkalmas S részgyűrűt az $n \times n$-es valós mátrixok gyűrűjében, hogy a szokásos mátrix-vektor szorzásra nézve V egyetlen nemtriviális S-részmodulusa
a) $U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V \mid x_1 + \ldots + x_n = 0\}$, illetve
b) $U = \{(x, \ldots, x) \in V \mid x \in \mathbb{R}\}$ legyen.

6. Legyen $N \leq M \in$ Mod-R. Bizonyítsuk be, hogy létezik M-ben egy maximális U részmodulus, amelyre $N \cap U = 0$, és hogy ekkor M minden nem triviális részmodulusa nemtriviálisan metszi az $N \oplus U$ modulust. Mutassunk példát az Abel-csoportok között arra, hogy $N \oplus U$ nem feltétlenül az egész M.

7. Az alább felsorolt modulusosztályok közül melyikekben bontható minden modulus ciklikusok, illetve egyszerűek direkt összegére? Ha az egész osztályra nem igaz, milyen részosztályra teljesül a felbonthatóság?
a) vektorterek
b) ferdetest fölötti modulusok
c) véges Abel-csoportok
d) Abel-csoportok
e)* $\mathbb{Z}_n$ fölötti modulusok
f)* $K[x]$ fölötti modulusok, ahol K test

Hf1. Legyenek A, B és C részmodulusok az M modulusban, és tegyük föl, hogy $A \geq C$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A \cap (B + C) = (A \cap B) + C$.

Hf2. Legyen

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{és} \quad R = \left\{ \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy M jobbmodulus R fölött (a természetes mátrixszorzással), és hogy M-nek egyetlen valódi részmodulusa van.

Hf3. Legyen M jobb R-modulus. Bizonyítsuk be, hogy M annullátora R-ben, azaz $Ann_R(M) = \{ r \in R \mid rm = 0 \ \forall\ m \in M \}$ kétoldali ideálja R-nek.