1. *Legyen $M \in \text{Mod-}R$, azaz M jobb oldali R-modulus, B balideálja, J jobbideálja R-nek, $a \in M$ és U, V részmodulusok M-ben. Az alábbiak közül melyikek lesznek feltétlenül részmodulusai M-nek? (Az összegek komplexusösszegeket, a szorzatok a komplexusszorzat elemeiből alkotott összegek hamazát jelentik, $\mathrm{Ann}_M\,/(H)$ — $H \subseteq R$ annullátora M-ben — pedig az M azon elemeinek halmazát jelenti, amelyeket a H minden eleme 0-ba szoroz.)*

a) aR	*b)* aB	*c)* aJ	*d)* $U \cap V$	*e)* $U \cup V$
f) $U + V$	*g)* $\mathrm{Ann}_M(B)$	*h)* $\mathrm{Ann}_M(J)$	*i)* UB	*j)* UJ.

Megoldás: a) aR részmodulus, a c) speciális esete.

b) aB nem részmodulus, pl. legyen $R = \mathbb{R}^{n\times n}$, B álljon azokból a mátrixokból, amelyeknek az első oszlopán kívül nincs nemnulla eleme, $M = R$, és $a = I_n$.

c) aJ részmodulus: $aj + aj' = a(j + j') \in aJ$, $(aj)r = a(jr) \in aJ$.

d) $U \cap V$ részmodulus: ha $v, v' \in U \cap V$, akkor U-ban és V-ben is benne vannak, tehát $v + v'$ és minden vr benne van U-ban és V-ben, így a metszetükben is.

e) $U \cup V$ nem részmodulus, már vektorterekre sem: R^2-ben az x tengely, illetve az y tengely vektorai alteret alkotnak, de az uniójuk nem zárt az összegre.

f) $U + V$ részmodulus: $(u + v) + (u' + v') = (u + u') + (v + v') \in U + V$, és $(u + v)r = ur + vr \in U + V$.

g) $\mathrm{Ann}_M(B)$ részmodulus: ha $mb = m'b = 0$ minden $b \in B$-re, akkor $(m + m')b = mb + m'b = 0$ és $(mr)b = m(rb) = 0$ minden $r \in R$-re, ugyanis $rb \in B$.

h) $\mathrm{Ann}_M(J)$ nem feltétlenül részmodulus. Legyen $R = \mathbb{R}^{n\times n}$, mint a b) részben, J álljon azokból a mátrixokból, amelyeknek az első során kívül csak 0 elemei vannak, és $M = \mathbb{R}^n$ álljon sorvektorokból. Ekkor $\mathrm{Ann}_M(J)$ azokból a sorvektorokból áll, amelyeknek az első eleme 0, de ezek nem alkotnak részmodulust (M_R különben is egyszerű).

i) Nem részmodulus. Legyen $R = \mathbb{R}^{n\times n}$, $U = M = R^n$ álljon az n-dimenziós sorvektorokból, és legyen B azon mátrixok halmaza, amelyeknek az első oszlopán kívül csupa 0 eleme van. Ekkor $UB = \{[x, 0, \ldots, 0] \mid x \in \mathbb{R}\}$, ami nem részmodulus.

j) Részmodulus.

2. *a) Legyen $1 \in S \leq R$. Bizonyítsuk be, hogy minden R-modulus S-modulus is, de fordítva nem igaz.*

b) Legyen $I \lhd R$. Mi a kapcsolat az R-modulusok és az R/I-modulusok között?

Megoldás: a) Az nyilvánvaló, hogy egy R-modulus az S-beli elemekkel való szorzásra is zárt. A fordított irányt többféleképpen lehet értelmezni. Egyrészt egy R-modulus S-részmodulusa nem feltétlenül R-részmodulus (pl. $\mathbb{R}_\mathbb{R}$-nek $\mathbb{Z}$-részmodulusa $\mathbb{Z}$, de nyilván nem $\mathbb{R}$-részmodulusa), másrészt egy S-moduluson többnyire nem lehet úgy definiálni az R-beli elemekkel való szorzást, hogy az eredeti modulusműveleteket megtartsuk, és R-modulust kapjunk, pl. $R = \mathbb{R}$, $S = \mathbb{Z}$ esetén $M = \mathbb{Z} \leq \mathbb{R}_\mathbb{Z}$ nyilván nem tehető $\mathbb{R}$-modulussá, mert a számossága is túl kicsi.

b) Minden R/I-modulus R-modulus is (az $mr := m(r + I)$ szorzással), és egy R-modulus, M pontosan akkor R/I-modulus, ha $MI = 0$ (ekkor az $m(r + I) = mr$ szorzat jól van definiálva, és az axiómák teljesülése következik az R-modulus tulajdonságaiból).

3. *Hány részmodulusa van az alábbi modulusoknak, és azok hány izomorfiaosztályba tartoznak?*

a) $\mathbb{R}^4$ *mint* $\mathbb{R}$*-modulus.*

b) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5$ *mint* $\mathbb{Z}$*-modulus.*

c) A 2-elemű test fölötti 3×3-as mátrixok gyűrűje, $\mathbb{F}_2^{3\times 3}$, önmaga fölött.

d) $\mathbb{F}_2^{3\times 3}$ *mint a fölső háromszögmátrixok gyűrűje fölötti jobbmodulus.*

Megoldás: a) A test fölötti modulusok vektorterek, és $\mathbb{R}^4$-ben már egy dimenziós altérből is végtelen sok van. Viszont az azonos dimenziós alterek mind izomorfak egymástól, így az izomorfiatípusuk csak ötféle lehet.

b) Véges Abel-csoportoknak minden p prímhez egyetlen p-Sylow-részcsoportjuk van, amely tartalmazza az összes p-hatványrendű elemet. Így $G = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5$-nek minden H részcsoportja $H = P \oplus Q$ alakú, ahol $P \leq \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$ és $Q \leq \mathbb{Z}_5$. Q nyilván csak kétféle lehet. $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$ negyedrendű elemet tartalmazó valódi részcsoportjaiból ($\cong \mathbb{Z}_4$) csak $\frac{2\cdot 2}{2}$ darab van (a negyedrendű elemekből 2-2 ugyanazt a részcsoportot generálja), a többi valódi részcsoport a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ öt részcsoportjának valamelyike. Így a G csoportnak összesen $(1 + 2 + 5) \cdot 2 = 16$ részcsoportja van, és ezek $5 \cdot 2 = 10$ izomorfiatípushoz tartoznak ($P \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2$ vagy 0, és $Q \cong \mathbb{Z}_5$ vagy 0).

c) Legyen $R = K^{3\times 3}$, ahol $K = \mathbb{F}_2$. Az R_R részmodulusai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők a bennük levő mátrixok oszlopai által generált altereknek a $K^3 = \mathbb{F}_2^3$-ben a következő módon. Mivel R egyszerű gyűrű, $R = Re_1R$, ahol $e_1 = E_{11}$ azt a mátrixot jelöli, amelynek egyetlen nem 0 eleme az $(1, 1)$ helyen álló 1. $M \leq R_R$-re $Me_1 \leq (Re_1)_K \cong K^3$, míg $V = Ve_1 \leq (Re_1)_K$-ra $Ve_1R \leq R_R$. Ez a két leképezés egymás inverze: $Me_1R = MRe_1R = MR = M$, és $Ve_1Re_1 = Ve_1$. Tehát R_R részmodulusainak száma a K^3 vektortér altereinek száma, azaz $1 + 7 + 7 + 1 = 16$. Rádasásul $M \cong N$ akkor és csak akkor, ha $Me_1 \cong Ne_1$ (azaz, ha $\dim_K Me_1 = \dim_K Ne_1$), mert mindegyik izomorfizmust egy invertálható mátrixszal való balszorzás valósítja meg (a modulus-izomorfizmusok $K^{3\times 3}$ fölött egyúttal vektortér-izomorfizmusok is, és egy $r \in R$ elemmel való balszorzás mindig modulus-homomorfizmus), így a részmodulusoknak 4 izomorfiatípusa van.

d) A c) rész jelöléseit megtartva legyen S a felső háromszögmátrixok részgyűrűje R-ben. Most az R_S részmodulusait kell leírnunk. Ha egy 3×3-as mátrixot jobbról szorzunk egy felső háromszögmátrixszal, akkor az első oszlopba az eredeti mátrix első oszlopának skalárszorosa kerül, a másodikba az első két oszlop lineáris kombinációja, a harmadikba pedig a három oszlop egy lineáris kombinációja. Így egy M részmodulus mátrixainak első oszlopai által alkotott altér (V_1), a mátrixok második oszlopai által alkotott altér (V_2) és a mátrixok harmadik oszlopai által alkotott altér (V_3) növő altérsorozatot alkotnak K^3-ben, és ez jellemzi is a részmodulust. ($V_1 = ME_{13}$, $V_2 = ME_{23}$ és $V_3 = ME_{33}$, ahol E_{ij} az a mátrix, amelynek egyetlen nem nulla eleme az (i, j) helyen levő 1). Formálisan láthatjuk, hogy az $M \mapsto (ME_{13}, ME_{23}, ME_{33})$, illetve a $V_1 \leq V_2 \leq V_3 \leq RE_{33} \cong K^3$ esetre $(V_1, V_2, V_3) \mapsto V_1E_{31} + V_2E_{32} + V_3E_{33}$ megfeleltetés egymás inverze: $ME_{13}E_{31} + ME_{23}E_{32} + ME_{33}E_{33} = ME_{11} + ME_{22} + ME_{33} = MI_3 = M$, és $(V_1E_{31} + V_2E_{32} + V_3E_{33})E_{i3} = V_iE_{33} = V_i$. Továbbá $ME_{13} = ME_{12}E_{23} \leq ME_{23}$ és $ME_{23} = ME_{23}E_{33} \leq ME_{33}$ miatt M képe növő altérlánc, a (V_1, V_2, V_3) altérhármas képe pedig S-modulus: $(V_1E_{31} + V_2E_{32} + V_3E_{33})E_{1i} = V_1E_{31}E_{1i} = V_1E_{3i} \leq V_iE_{3i}$, ha $1 \leq i$, $(V_1E_{31} + V_2E_{32} + V_3E_{33})E_{2i} = V_2E_{32}E_{2i} = V_2E_{3i} \leq V_iE_{3i}$, ha $2 \leq i$, és $(V_1E_{31} + V_2E_{32} + V_3E_{33})E_{33} = V_3E_{33}$. $\mathbb{F}_2^3$ növő altérhármasainak száma 172, az izomorfiatípusok (hasonlóan a c) feladathoz) pedig csak a dimenziókon múlnak, és ezekből 20 van (a $0, 1, 2, 3$ három elemű ismétléses kombinációinak a száma).

4. *Mi lehet a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_3$, illetve $\mathbb{Z}_6$ gyűrűk fölötti (unitér) modulusok additív csoportja? Izomorfia erejéig hány* 15 *elemű modulus van az egyes gyűrűk fölött?*

Megoldás: $\mathbb{Z}$ fölötti modulus minden Abel-csoport. $\mathbb{Z}_3$ test, tehát a $\mathbb{Z}_3$ fölötti modulusok vektorterek, és így $\oplus \mathbb{Z}_3$ alakban felírhatók (elemi Abel 3-csoportok). $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ mint gyűrű, és így minden $M_{\mathbb{Z}_6}$ modulusra $M = M\mathbb{Z}_2 \oplus M\mathbb{Z}_3$ egy $\mathbb{Z}_2$-modulus és egy $\mathbb{Z}_3$-

modulus (vektortér) direkt összege, tehát mint Abel-csoport $(\oplus \mathbb{Z}_2) \oplus (\oplus \mathbb{Z}_3)$. 15-ödrendű $\mathbb{Z}$-modulus csak egy van ($\mathbb{Z}_{15}$), a másik két gyűrű fölött pedig nincs 15-ödrendű modulus.

5. *Legyen $V = \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}$ fölötti n-dimenziós vektortér. Keressünk alkalmas S részgyűrűt az $n \times n$-es valós mátrixok gyűrűjében, hogy a szokásos mátrix-vektor szorzásra nézve V egyetlen nemtriviális S-részmodulusa*

a) $U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V \mid x_1 + \ldots + x_n = 0\}$, *illetve*
b) $U = \{(x, \ldots, x) \in V \mid x \in \mathbb{R}\}$ *legyen.*

Megoldás: Tetszőleges $U \leq V$ altérre az $S = \{\varphi \in \operatorname{End} V \mid U\varphi \leq U\} \leq \operatorname{End} V \cong \mathbb{R}^{n \times n}$ részgyűrűre igaz, hogy U az egyetlen valódi S-invariáns altér. Ugyanis ha $W \not\leq U$ és $W < V$, akkor a $w \in W \setminus U$ és $v \in V \setminus W$ vektorokhoz van olyan $\varphi \in \operatorname{End} V$, amelyre $w\varphi = v$, és $U\varphi = 0$, így $\varphi \in S$, de $W\varphi \not\leq W$. Ha pedig $0 < W < U$, akkor $u \in U \setminus W$, $w \in W \setminus \{0\}$-ra van olyan $\varphi \in S$, hogy $\varphi : w \mapsto u$ (és U egy w-t tartalmazó bázisának többi elemén 0), így $W\varphi \not\leq W$.

Speciálisan az a) esetben S azokból a mátrixokból áll, amelyeknek mindegyik sorösszege ugyanannyi, a b) esetben pedig azokból, amelyeknek mindegyik oszlopösszege ugyanannyi.

6. *Legyen $N \leq M \in$ Mod-R. Bizonyítsuk be, hogy létezik M-ben egy maximális U részmodulus, amelyre $N \cap U = 0$, és hogy ekkor M minden nem triviális részmodulusa nemtriviálisan metszi az $N \oplus U$ modulust. Mutassunk példát az Abel-csoportok között arra, hogy $N \oplus U$ nem feltétlenül az egész M.*

Megoldás: Bármely olyan felszálló részmodulusláncra, amelynek tagjai az N-et csak 0-ban metszik, az unió is ilyen részmodulus, ezért a Zorn-lemma szerint létezik az ilyen modulusok között maximális. Ha pedig U maximális ilyen modulus, és $0 < W \leq M$-re $(N + U) \cap W = 0$, akkor $N \cap (U + W) = 0$ (ugyanis $n = u + w$ esetén $w = n - u \in (N + U) \cap W = 0$, amiből $w = n - u = 0$, és $N \cap U = 0$ miatt $n = u = 0$ is igaz), és ez ellentmond U maximalitásának.

A $\mathbb{Z}_4$ Abel-csoportban $\mathbb{Z}_2$-höz 0 a maximális olyan részmodulus, ami csak triviálisan metszi metszi $\mathbb{Z}_2$-t, de $0 + \mathbb{Z}_2 \neq \mathbb{Z}_4$.

7. *Az alább felsorolt modulusosztályok közül melyikekben bontható minden modulus ciklikusok, illetve egyszerűek direkt összegére? Ha az egész osztályra nem igaz, milyen részosztályra teljesül a felbonthatóság?*

a) vektorterek
b) ferdetest fölötti modulusok
c) véges Abel-csoportok
d) Abel-csoportok
*e)** *$\mathbb{Z}_n$ fölötti modulusok*
*f)** *$K[x]$ fölötti modulusok, ahol K test*

Megoldás: a), b) Egyszerű gyűrű féligegyszerű is, ezért minden modulusa egyszerűek direkt összege.

c) A véges Abel-csoportok alaptétele szerint minden véges Abel-csoport felbontható ciklikusok direkt összegére. Egyszerűek (p-edrendű ciklikusok) összegére viszont általában nem (pl. a $\mathbb{Z}_4$ sem).

d) Végesen generált Abel-csoportok felbonthatók ciklikusok direkt összegére (egyszerűekre természetesen nem). A nem végesen generáltakra ez azonban nem igaz: a 2. feladatsor 6. feladatában belátjuk, hogy $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ nem projektív, tehát nem írható fel $\mathbb{Z}$-k direkt összegeként (más ciklikus komponens pedig nem is jönne szóba, minthogy $\mathbb{Q}$ minden nem nulla eleme végtelen rendű).

e) A $\mathbb{Z}_n$-modulusok minden eleme legföljebb n-edrendű, és Prüfer tétele szerint véges exponensű Abel-csoportok ciklikusok direkt összegére bonthatók. Egyszerűek direkt összegére nyilván nem.

f) $K[x]$ főideálgyűrű, sőt euklideszi gyűrű, így minden végesen generált $K[x]$-modulus felbontható ciklikus modulusok direkt összegére. Nem végesen generált modulusokra ez nem igaz, például a racionális törtfüggvények teste, $K(x)$ nem bontható fel, mert $K(x)$ minden elemének van x-edrésze, viszont a $K[x]$ fölötti ciklikus modulusokra ($\cong K[x]/(p(x))$), és így ezek direkt összegére sem igaz ez. Egyszerűek ($K[x]/(p(x))$-ek, ahol $p(x)$ irreducibilis) direkt összegére a végesen generáltak se bonthatók, például a $K[x]/(x^2)$ sem.

Hf1. *Legyenek A, B és C részmodulusok az M modulusban, és tegyük föl, hogy $A \geq C$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A \cap (B + C) = (A \cap B) + C$.*

Hf2. *Legyen*

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \textit{és} \quad R = \left\{ \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \;\middle|\; c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy M jobbmodulus R fölött (a természetes mátrixszorzással), és hogy M-nek egyetlen valódi részmodulusa van.

Hf3. *Legyen M jobb R-modulus. Bizonyítsuk be, hogy M annullátora R-ben, azaz $\mathrm{Ann}_R(M) = \{ r \in R \mid rm = 0 \ \forall\ m \in M \}$ kétoldali ideálja R-nek.*