

1. Keressük meg C_3 irreducibilis reprezentációit egy tetszőleges K test fölött! Határozzuk meg KC_3 részmodulusait, ha K karakterisztikája 3.

Megoldás: C_3 reprezentációi $GL(V)$ -be menő csoport-homomorfizmusok. A reprezentációt meghatározza a C_3 generátorelemének a képe: egy olyan A mátrix, amelyre $A^3 = I$. Ahhoz, hogy a reprezentáció irreducibilis legyen, az kell, hogy V -nek ne legyen A -invariáns valódi altere. Legyen $m(x)$ az A minimálpolinomja. $A^3 = I$ miatt $m(x) \mid x^3 - 1$. Ha $m(1) = 0$, akkor 1 sajátértéke A -nak, tehát A -nak van sajátvektora, és az ez által generált altér A -invariáns, azaz ekkor $\dim V = 1$, és A triviálisan hat rajta. $\text{char } K = 3$ esetén $x^3 - 1 = (x - 1)^3$, ezért ekkor más irreducibilis reprezentáció nincs is.

Tegyük fel most, hogy $\text{char } K \neq 3$ és $m(1) \neq 0$. Ekkor $m(x) \mid x^2 + x + 1$. Ha $x^2 + x + 1$ reducibilis K fölött, akkor a gyökei különbözőek (ugyanis $x^3 - 1$ -nek sincs többszörös gyöke 3-tól különböző karakterisztika esetén, mert $x^3 - 1$ relatív prím a deriváltjához), és mindkét sajátértékhez tartozik egy egydimenziós reprezentáció. Ekkor C_3 -nak három elsőfokú reprezentációja van.

Ha $x^2 + x + 1$ irreducibilis K fölött, akkor tetszőleges $v \in V$ -re a v és vA által generált altér A -invariáns (ui. $vA^2 = -v - vA$), és ennek már nincs A -invariáns altere, mert akkor A -nak lenne sajátvektora. Tehát ilyenkor $\dim V = 2$, és ilyen reprezentáció valóban létezik:

$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Több irreducibilis reprezentáció nem lehet, mert $1 + 2 = \dim \mathbb{C}C_3$.

3 karakterisztikájú K test esetén KC_3 minimális részmodulusa csak olyan $x + ya + za^2$ elemekből állhat (ahol $C_3 = \langle a \rangle$), amelyekre $(x + ya + za^2)a = z + xa + ya^2 = x + ya + za^2$, azaz $x = y = z$, mert KC_3 egyetlen irreducibilis modulusa a triviális modulus. Tehát $M_1 = \{ \lambda(1 + a + a^2) \mid \lambda \in K \}$ az egyetlen minimális részmodulus KC_3 -ban, e fölött maximális modulus pedig szintén csak egy van, ugyanis csak olyan u elemek lehetnek benne, amelyekre $ua - u \in M_1$, hogy M_2/M_1 triviális egyszerű modulus legyen, és ilyenek csak azok az $x + ya + za^2$ elemek, amelyekre $x + y + z = 0$.

2. Adjuk meg $C_2 \times C_2$ irreducibilis reprezentációit egy tetszőleges K test fölött!

Megoldás: $C_2 \times C_2$ homomorfizmusait $GL(V)$ -be megadja a két komponens generátorelemének homomorf képe, A és B , azaz olyan mátrixpár, amelyre $A^2 = B^2 = I$ és $AB = BA$. A és B minimálpolinomja osztója $x^2 - 1$ -nek, tehát mindenképpen van K -ban sajátértékük. Legyen V_1 az A -nak egy sajátaltere. $AB = BA$ miatt ez B -invariáns: $vA = \lambda v$ esetén $(vB)A = v(BA) = v(AB) = (vA)B = \lambda vB$. Ebben B -nek van sajátvektora is, ismét a $B^2 = I$ feltétel miatt, tehát van A -nak és B -nek közös sajátvektora, azaz V -nek egydimenziós $C_2 \times C_2$ -invariáns altere. Így az irreducibilis reprezentáció csak egydimenziós lehet, azaz \mathbb{C}^\times -be vezető homomorfizmus. Ez mindkét generátor elemet 1-be vagy -1 -be viheti, és ezek valóban homomorfizmust adnak, tehát $\text{char } K = 2$ esetén egyetlen, egydimenziós irreducibilis reprezentáció van, minden más esetben négy.

3. Bizonyítsuk be, hogy egy Abel-csoportnak minden \mathbb{C} fölötti irreducibilis reprezentációja lineáris! Mi a helyzet tetszőleges test fölött?

Megoldás: A lineáris reprezentációk nyilvánvalóan irreducibilisek. Ha a G Abel-csoportot felbontjuk n_1, \dots, n_k rendű ciklikusok direkt szorzatára, és az i -edik generátorelemet egy tetszőleges n_i -edik komplex egységgyökbe képezzük, ez nyilván kiterjeszthető egy \mathbb{C}^\times -be menő csoporthomomorfizmussá, és így $n_1 n_2 \cdots n_k = |G|$ különböző lineáris

reprezentációt kapunk (ezek nyilvánvalóan nem is hasonlók egymáshoz). Mivel az irreducibilis reprezentációk fokainak a négyzetösszege $|G|$, ezen kívül G -nek már nem is lehet irreducibilis reprezentációja.

Ez más test fölött nem feltétlenül igaz, például C_3 -nak \mathbb{Z}_2 fölött van másodfokú irreducibilis reprezentációja (ld. a 3. feladat megoldását). Algebrailag zárt test fölött viszont mindig lineárisak az irreducibilis karakterek, ugyanis tetszőleges elemnek van sajátértéke, és az ehhez tartozó sajátaltér a vele felcserélhető elemekre, tehát az egész csoportra nézve invariáns, így az irreducibilitásból következik, hogy a sajátaltér a teljes vektortér. Mivel ez minden elemre igaz, a vektortér egy tetszőleges egydimenziós altere is G -invariáns, így a vektortér csak 1-dimenziós lehet. Viszont a lineáris karakterek száma lehet ekkor is kisebb a G elemszámánál, ha a karakterisztika osztja a csoport rendjét.

4. Adjuk meg S_4 -nek egy 3-dimenziós valós irreducibilis reprezentációját, és határozzuk meg ennek a reprezentációnak a karakterét.

Megoldás: A szabályos tetraéder egybevágósági csoportja S_4 , és ha egy ilyen tetraéder középpontját az origóba tesszük, akkor az egybevágóságai a 3-dimenziós valós téren lineáris transzformációk lesznek. Vegyük fel azt a bázist, amelynek elemei az origóból a tetraéder három csúcsába mutató vektorok (ekkor a negyedik csúcsba mutató vektor ezek összegének ellentettje, mert az átlaguk $\mathbf{0}$ kell, hogy legyen). Ebben felírva minden konjugáltosztályból egy transzformációt, a következő mátrixokat kapjuk (a permutációknak az a transzformáció felel meg, amelyik a négy csúcsot az adott permutáció szerint permutálja, és a három bázisvektor az első három csúcs helyvektora):

$$X(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad X((12)(34)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad X((123)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X((12)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad X((1234)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Így $\chi(1) = 3$, $\chi((12)(34)) = -1$, $\chi((123)) = 0$, $\chi((12)) = 1$, $\chi((1234)) = -1$.

5. Bizonyítsuk be, hogy egy irreducibilis karakternek és egy lineáris karakternek a szorzata mindig irreducibilis.

Megoldás: Legyen $\chi \in \text{Irr } G$ és λ lineáris. Ekkor $[\lambda\chi, \lambda\chi] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \lambda(g)\chi(g)\overline{\lambda(g)\chi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\lambda(g)|^2 |\chi(g)|^2$. De $\lambda(g)$ egységgyök, így $|\lambda(g)|^2 = 1$, és ezért az utóbbi összeg $[\chi, \chi] = 1$.

6. Határozzuk meg A_4 és S_4 karaktertábláját.

Megoldás: A_4 -nek a kommutátor részcsoportja a 4-elemű Klein-csoport, így három lineáris karaktere van, ami az $A_4/A_4' \cong C_3$ karaktereinek felel meg: a harmadrendű elem tetszőleges harmadik egységgyökbe képződhet, az inverze pedig ennek konjugáltjába. Az egyetlen nem lineáris karaktert ezután az ortogonalitási relációk segítségével is kiszámíthatjuk, de megkaphatjuk úgy is, mint S_4 már ismert (valamelyik) 3-adfokú irreducibilis reprezentációjának A_4 -re való megszorítottját. A karaktertáblában ε primitív

harmadik egységgyök.

A_4	1	$(..)(..)$	$(123)^G$	$(321)^G$
	1	1	1	1
	1	1	ε	$\bar{\varepsilon}$
	1	1	$\bar{\varepsilon}$	ε
	3	-1	0	0

S_4 -nek öt konjugáltosztálya, így öt irreducibilis karaktere van. Ebből ismerjük a két lineáris karaktert, továbbá a 6. feladatban megadott harmadfokú karaktert. Ez utóbbinak a nem triviális lineáris karakterrel vett szorzata megadja a negyedik irreducibilis karaktert (a 7. feladat szerint ez is irreducibilis), az ötödik (másodfokú) karaktert pedig már ortogonalitással kiszámolhatjuk. Így a karaktertábla

S_4	1^1	$(..)(..)^3$	$(...)^8$	$(..)^6$	$(....)^6$
	1	1	1	1	1
	1	1	1	-1	-1
	3	-1	0	1	-1
	3	-1	0	-1	1
	2	2	-1	0	0

7. Bizonyítsuk be, hogy egy nemtriviális csoport karaktertáblájának minden sorában és minden oszlopában legalább két nemnulla szám van.

Megoldás: A triviális karakter sorára nyilván igaz ez. Ha $1_G \neq \chi \in \text{Irr } G$, akkor $0 = [\chi, 1_G] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^k |\mathcal{K}_i| \chi(g_i)$, és $\mathcal{K}_1 = \{1\}$ esetén $\chi(g_1) \neq 0$, így van másik konjugáltosztály is, amelynek g_i reprezentáns elemére $\chi(g_i) \neq 0$.

Az 1-nek az oszlopa a karakterek fokait tartalmazza: ezek nem nullák, $g \neq 1$ -re pedig $\sum_{i=1}^k \chi_i(g) \chi_i(1) = 0$, és a tagok közül $1_G(g)1_G(1) \neq 0$, így van még egy nem nulla tag.

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy egy 28 elemű nem kommutatív csoportnak van másodfokú irreducibilis reprezentációja \mathbb{C} fölött.

Hf2. Egészítsük ki a következő táblázatot, ha tudjuk, hogy ez egy véges csoport karaktertáblája (vegyük figyelembe, hogy a sorok és oszlopok esetleg nem a megszokott sorrendben vannak, tehát az 1 elemhez tartozó oszlop nem feltétlenül az első, és a triviális karakter nem

feltétlenül az első sorba került)! Mekkora a csoport rendje, konjugáltosztályainak mérete, milyen rendű normálosztói vannak? Mekkora a csoport centruma?

1		1	-1		1	
1					-1	1
		1	-1			1
			0	0		-2
2		-2	0		$-i\sqrt{2}$	0
2	0		0			0