Gyűrűk és csoportok reprezentációelmélete

I. Gyűrűk reprezentációelmélete

Készült: Dr. Lukács Erzsébet 2013. tavaszán tartott előadásai alapján

Dr. Lukács Erzsébet, Magyar András*

Jelölések

$\mathbb{Z}$	egész számok gyűrűje
K	test
$M_n(K)$	K test feletti $n \times n$ mátrixok
$\mathrm{Cen}(R)$	R gyűrű centruma
Mod-R	jobb R-modulusok
mod-R	végesen generált jobb R-modulusok
$\oplus_{i\in I} M_i$	M_i modulusok direkt összege
$\Pi_{i\in I} M_i$	M_i modulusok direkt szorzata
$\mathrm{Hom}_R(M,N)$	az $M \to N$ modulushomomorfizmusok halmaza
$Z(G)$	a G csoport centruma

1. Moduluselméleti alapok

Elsőként rögzítünk néhány konvenciót. A jegyzetben R egy egységelemes gyűrűt jelöl, az gyűrű egységelemét pedig $1 (\in R)$. Egy A algebrán egy K-algebrát értünk, ahol K egy test. Tehát A egy vektortér K felett, amelyen értelmezett egy szorzás, hogy minden $a, b \in A$ és $\lambda \in K$ esetén $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$ teljesül. Az A algebráról szintén feltesszük, hogy egységelemes és (ha csak mást nem mondunk) véges dimenziós (mint K-vektortér).

1.1. Példák.

- $M_n(K) = K^{n\times n}$ egy n^2 dimenziós K-algebra a szokásos mátrix műveletekkel.
- A $K[x]$, ill. $K[x_1, \ldots, x_n]$ polinomgyűrűk végtelen dimenziós K-algebrák.
- csoportalgebrák: legyen $G = (G, \cdot)$ egy véges csoport. Ekkor a G csoport K feletti KG csoportalgebrája az alábbi módon definiált.

$$KG = \left\{ \sum_{g\in G} \lambda_g g \;\middle|\; \lambda_g \in K, g \in G \right\}$$

*A jegyzet elkészítését a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal (NKFIH–115288) támogatta

Azaz KG elemei a K együtthatós G változós formális lineáris kombinációk. Két elem összege a

$$\sum_{g\in G}\lambda_g g+\sum_{g\in G}\lambda'_g g=\sum_{g\in G}(\lambda_g+\lambda'_g)g,$$

illetve szorzata a

$$\sum_{g\in G}\lambda_g g\sum_{g'\in G}\lambda'_g g'=\sum_{u\in G}\left(\sum_{g\in G}\lambda_g\lambda'_{gu^{-1}}\right)u$$

módon értelmezett. Ezzel KG egy $|G|$-dimenziós K-algebra, egy bázisát alkotják G elemei, egységeleme pedig a csoport e egységeleme.

- Általában egy K test feletti A algebrát megadhatunk a következő módon. Legyen A egy K feletti vektortér rögzített $\mathcal{B}=\{b_i\}_{i=1}^n$ bázissal. Tetszőleges $i,j,k\in I$ esetén legyen $b_ib_j=\sum_m\lambda_{i,j,m}b_m$ úgy, hogy $(b_ib_j)b_k=b_i(b_jb_k)$. Vagyis a szorzást elég a b_i báziselemeken definiálni, majd ezt kiterjeszteni disztributívan. Az asszociativitást pedig elég a báziselemek szorzataira megkövetelni.

1.2. Megjegyzés.

- Egy A (egységelemes) K-algebra esetén gondolhatjuk azt, hogy $K\subseteq \mathrm{Cen}(A)$, azaz K az algebra centrumában van. Fordítva, minden olyan R gyűrű, amely centrumában tartalmaz egy K testet K-algebrának tekinthető, hiszen R ekkor K-vektortér és $\lambda(ab)=(\lambda a)b=a(\lambda b)$ teljesül minden $a,b\in A$, ill. $\lambda\in K\subseteq \mathrm{Cen}(R)$ esetén.
- A továbbiakban egységelemes algebrák gyűrűhomomorfizmusán egységelemet őrző homomorfizmust értünk!

1.1. Modulusok, részmodulusok és faktormodulusok

1.3. Definíció (Modulusok)**.** Az M Abel-csoport jobb R-modulus, ha M-en értelmezve van az R elemeivel való jobbszorzás, továbbá minden $m,m'\in M$ és $r,r'\in R$ esetén teljesülnek a következő műveleti tulajdonságok.

- $(m+m')r=mr+m'r$
- $m(r+r')=mr+mr'$
- $m(rr')=(mr)r'$

Az M unitér jobb modulus, ha minden $m\in M$ esetén $m1=m$.

Analóg módon értelmezhetőek az R gyűrűhöz tartozó bal modulusok. Ezentúl jobb/bal moduluson mindig unitér jobb/bal modulust értünk, illetve ha mást nem mondunk, egy modulus jobb modulust jelent. Modulusok osztályának fontos részét képezik a *végesen generált* modulusok. Egy M modulus végesen generált, ha létezik $m_1,\dots,m_n\in M$, hogy az M tetszőleges m eleme felírható $\sum_i m_ir_i$ alakban alkalmas r_i gyűrűbeli elemekkel.

1.4. Példák.

- A vektorterek test feletti modulusok. Egy vektortér pontosan akkor végesen generált, ha véges dimenziós.

- Az R gyűrű maga is tekinthető modulusnak, ha a modulus szorzást azonosítjuk a gyűrűbeli szorzással. Az így kapott modulust az R jobb reguláris modulusának nevezzük.

- Tetszőleges M Abel-csoport $\mathbb{Z}$-modulus, ugyanis $u \in M$ és $n\mathbb{Z}$ esetén legyen $un = \underbrace{u + \ldots + u}_{n\text{-szer}}$.

- Ha M Abel-csoport, akkor M speciálisan bal oldali $\mathbb{Z}$-modulus is, ha most az nu balról szorzást $nu := un$-ként értelmezzük. Általában is, ha R egy kommutatív gyűrű, akkor minden jobb R-moduluson egy bal R-modulus struktúra adódik, ha a balról szorzást a jobbról szorzással azonosítjuk.

- Minden M Abel-csoport tekinthető $\mathrm{End}(M)$-modulusnak, ahol $\mathrm{End}(M) = \mathrm{Hom}(M, M)$ azaz az M-ből M-be menő Abel-csoport-homomorfizmusok halmaza. Az $\mathrm{End}(M)$ a pontonkénti összeadással és a kompozícióval mint szorzással gyűrűt alkot. Könnyű ellenőrizni, hogy (a homomorfizmusokat jobbról írva), M ezáltal $\mathrm{End}(M)$ modulus.

- Általánosabban mondva, ha M egy tetszőleges Abel-csoport és R egy tetszőleges gyűrű, akkor minden $\varphi : R \to \mathrm{End}(M)$ gyűrűhomomorfizmus megad egy modulus struktúrát M-en az $mr = m(r)\varphi$ szorzással. Fordítva, minden R-modulus struktúrához tartozik egy $R \to \mathrm{End}(M)$ gyűrűhomomorfizmus, ahol egy $r \in R$ elemnek az az endomorfizmus felel meg, amely egy m elemet mr-be képez.

  Azt is látjuk ezáltal, hogy minden $\varphi : R \to S$ gyűrűhomomorfizmus az S-modulusokat egy R-modulus struktúrával látja el az $mr := m(r)\varphi$ szorzással.

- Legyen A egy K-algebra. Ekkor minden A-modulus vektortér is az előző konstrukció szerint, hiszen létezik egy $\varphi : K \to \mathrm{Cen}(A)$ injektív gyűrűhomomorfizmus.

1.5. Jelölések.

- Ha hangsúlyozni szeretnénk, hogy az M egy jobb (bal) R-modulus, akkor M helyett M_R-t ($_RM$)-t írunk.

- Egy R gyűrű jobb modulusait Mod-R , bal modulusait R-Mod jelöli. Szokásos még az $\mathcal{M}_R$, illetve $_R\mathcal{M}$ jelölés is.

- A végesen generált jobb, ill. bal modulusok jelölésére pedig mod-R, ill. R-mod szolgál.

1.6. Definíció. Legyen R egy rögzített gyűrű, $M, N \in$ Mod-R .

1. Az N az M részmodulusa ($N \leq M$), ha N az M-nek részcsoportja és zárt az R-beli elemekkel való szorzásra, azaz minden $n \in N, r \in R$ esetén $nr \in N$. A csak a $0 \in M$-et tartalmazó részmodulust egyszerűen csak 0-valjelöljük.

2. Egy M modulus egyszerű, ha nincs valódi részmodulusa. Tehát, ha $N \leq M$, akkor $N = 0$ vagy $N = M$.

3. Legyen $X \subseteq M$ egy tetszőleges nem üres részhalmaz. Az X által generált részmodulusa M-nek a (tartalmazásra nézve) legkisebb X-et tartalmazó részmodulus. Jele XR.

$$XR = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i r_i \mid x_i \in X, r_i \in R \right\}$$

4. Ha $X = \{x\}$, azaz X egyelemű, akkor xR az x által generált ciklikus részmodulus. Az x által generált ciklikus modulust ($\{x\}R$ helyett röviden) xR jelöli.

5. Ha $X, Y \subseteq M$ két részhalmaza M-nek, akkor az a két halmaz összege $X + Y$ az összes $x + y$ alakú elemből áll, ahol $x \in X$ és $y \in Y$. Ha X csak egyelemű, akkor az $X + Y$ helyett $x + Y$-t írunk.

6. Legyen $N \leq M$. Az M modulus N szerinti faktormodulusa az M/N faktor Abel-csoport. Vagyis M/N elemei, az N részcsoport szerinti $x + N$ alakú mellékosztályok, amelyeken a szorzás $(N + x)r = N + xr$ módon értelmezett.

1.7. Definíció. Legyen M egy R-modulus, akkor az

$$M = M_0 \geq M_1 \geq \ldots \geq M_{n-1} \geq M_n = 0$$

részmoduluslánc az M kompozíció lánca, ha minden $0 \leq i \leq n-1$ index esetén az M_i/M_{i+1} egyszerű modulus.

A csoportelméletből ismert Jordan-Hölder–tétel modulusokra vonatkozót változata igaz.

1.8. Tétel (Jordan-Hölder–tétel). *Ha M-nek létezik (véges) kompozíciólánca, akkor minden kompozíciólánca ugyanolyan hosszú, és a benne szereplő faktorok ugyanolyan izomorfiatípusúak, ugyanolyan multiplicitással.*

1.9. Megjegyzés. Mivel $X + Y$ általában nem részcsoport tetszőleges X, Y részhalmazok esetén, ezért $X + Y$ általában nem részmodulus. Ám, ha X és Y is részmodulusa M-nek, akkor $X + Y$ az X-et és Y-t tartalmazó legszűkebb részmodulus. Továbbá, ha X, Y részmodulusok, akkor az $X \cap Y$ szintén részmodulus és ez a legbővebb olyan részmodulus, amelyet X és Y is tartalmaz. Könnyű ellenőrizni, hogy a $+$ és $\cap$ műveletekre nézve egy M modulus részmodulusainak halmaza háló.

1.10. Állítás (Moduláris azonosság). *Legyenek $U, V, W \leq M$ részmodulusok, hogy $U \leq V$ is teljesül. Ekkor $V \cap (U + W) = (V \cap W) + U$. Azaz a részmodulusok hálója moduláris háló.*

Bizonyítás. Az állítást kölcsönös tartalmazással bizonyítjuk. A bal oldal egy tipikus eleme $v = u + w$ alakba írható, ahol $u \in U, v \in V, w \in W$. Átrendezve $v - u = w$ adódik, és mivel $u \in U \leq V$, ezért $w \in V$ és így $w \in V \cap W$. Tehát v felírható egy U-beli és egy $W \cap V$-beli összegeként.

Legyen most x a jobb oldal egy tetszőleges eleme. Ekkor x egy $u + t$ alakú elem, ahol $u \in U$ és $t \in V \cap W$. Mivel $u \in V$ és $t \in V$ is teljesül, ezét valóban $x \in V$. Így $u \in V \cap (U + W)$. $\square$

1.2. Modulushomomorfizmusok, homomorfizmus- és izomorfizmustételek

1.11. Definíció. Legyen $M, N \in \text{Mod-}R$. Egy $\varphi : M \to N$ leképezés modulushomomorfizmus (röviden homomorfizmus), ha minden $m, m' \in M$ és $r \in R$ esetén

- $(m + m')\varphi = (m)\varphi + (m')\varphi$
- $(mr)\varphi = (m)\varphi r$

teljesül.

1.12. Megjegyzés. A későbbiekben a homomorfizmusokat jobbról írjuk. Emiatt egy $\varphi : L \to M$ és egy $\psi : M \to N$ homomorfizmus kompozíciója $\varphi\psi : L \to M$. Az M-ből N-be képező homomorfizmusok halmazát $\text{Hom}_R(M, N)$ fogja jelölni. Az R index jelöli, hogy a halmaz elemei nem csupán Abel-csoport-homomorfizmusok, de R-modulus homomorfizmusok is egyben. Könnyű belátni, hogy $\text{Hom}_R(M, N)$ egy Abel-csoport a pontonkénti összeadásra, azaz ha $\varphi + \psi$ az a homomorfizmus, amely egy $m \in M$ elemhez a $(m)\varphi + (m)\psi$ elemet rendeli.

A $\varphi : M \to N$ homomorfizmus $\ker\varphi$ magja és $\text{im}\,\varphi$ képe a

$$\ker\varphi = \{m \in M \mid (m)\varphi = 0\} \quad \text{és} \quad \text{im}\,\varphi = \{n \in N \mid \exists m \in M : (m)\varphi = n\}$$

(szokásos) módon definiált. Megjegyezzük, hogy $\ker\varphi$ mindig részmodulus M-ben és $\text{im}\,\varphi$ mindig részmodulus N-ben. Továbbá, ha $K \leq M$, akkor létezik olyan homomorfizmus, amelynek a magja éppen K, ill. létezik olyan homomorfizmus, amelynek képe éppen K. Valóban a $\mu : M \to M/K$ természetes homomorfizmus, amelynél $(m)\mu = m + K$, ill. az $\iota : K \to M$ természetes beágyazás, amelyre $(k)\iota = k \in M$ egy-egy ilyen.

Tetszőleges $M \in \text{Mod-}R$ esetén egyértelműen létezik egy $M \to 0$ és egy $0 \to M$ homomorfizmus. Emiatt bármely M, N moduluspár között létezik egyértelműen egy kitüntetett $M \to 0 \to N$ homomorfizmus, amelyet röviden csak $0 : M \to N$-nek írunk. A jelölést alátámasztja, hogy $M \to 0 \to N$ nem más, mint a $\text{Hom}_R(M, N)$ Abel-csoport 0 eleme.

1.13. Definíció. Egy $\varphi : M \to N$ homomorfizmus monomorfizmus, ha injektív ($\varphi : M \rightarrowtail N$) és epimorfizmus, ha szürjektív ($\varphi : M \twoheadrightarrow N$). Ha φ injektív és szürjektív is, akkor izomorfizmus ($\varphi : M \overset{\cong}{\to} N$). Azt mondjuk, hogy M és N modulusok izomorfak (jelben $M \cong N$, ha létezik köztük egy $\varphi : M \to N$ izomorfizmus.

1.14. Állítás. *A $\varphi : M \to N$ homomorfizmusra a következő tulajdonságok ekvivalensek.*

(*i*) *φ monomorfizmus;*

(*ii*) $\ker\varphi = 0$*;*

(*iii*) *tetszőleges $\beta, \gamma : L \to M$ homomorfizmusok esetén, ha $\beta\varphi = \gamma\varphi$, akkor $\beta = \gamma$;*

(*iv*) *ha $\beta\varphi = 0$ valamely $\beta : L \to M$ esetén, akkor $\beta = 0$.*

Bizonyítás. (*i*) $\Leftrightarrow$ (*ii*): ha φ injektív, akkor a $0 \in N$ ősképe csak a $0 \in M$. Fordítva, ha $(m)\varphi = (m')\varphi$, akkor $m - m' \in \ker\varphi = 0$. (*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*): ha $x \in L$, akkor $(x)(\beta - \gamma) \in \ker\varphi = 0$. Vagyis $\beta = \gamma$. (*iii*) $\Rightarrow$ (*iv*): triviális. (*iv*) $\Rightarrow$ (*ii*): legyen β a $\ker\varphi \to M$ természetes beágyazás. Ekkor $\beta\varphi = 0$, a feltételek szerint pedig $\beta = 0$ és így $\ker\varphi = 0$. $\square$

1.15. Állítás. *A $\varphi : M \to N$ homomorfizmusra a következő tulajdonságok ekvivalensek.*

(*i*) *φ epimorfizmus;*

(*ii*) $\operatorname{im} \varphi = N$;

(*iii*) *tetszőleges $\beta, \gamma : N \to L$ homomorfizmusok esetén, ha $\varphi\beta = \varphi\gamma$, akkor $\beta = \gamma$;*

(*iv*) *ha $\varphi\beta = 0$ valamely $\beta : N \to L$ esetén, akkor $\beta = 0$.*

Bizonyítás. (*i*) $\Leftrightarrow$ (*ii*) a definíció szerint. (*i*) $\Rightarrow$ (*iii*) és (*iii*) $\Rightarrow$ (*iv*) triviális. (*iv*) $\Rightarrow$ (*ii*): legyen $\beta : N \to N/\operatorname{im} \varphi$ természetes homomorfizmus. Ekkor minden $n \in N$-re $(n)\varphi\beta = 0$, a feltétel szerint emiatt $\beta = 0$, azaz $\operatorname{im} \varphi = N$. □

1.16. Állítás. *A $\varphi : M \to N$ pontosan akkor izomorfizmus, ha egyértelműen létezik egy $\psi : N \to M$ homomorfizmus, amellyel $\varphi\psi = \mathrm{id}_M$ és $\psi\varphi = \mathrm{id}_N$.*

Bizonyítás. Az elégségességhez vegyük észre, hogy ψ a φ inverze.

Ha φ egy izomorfizmus, akkor létezik egyértelműen egy φ^{-1} (halmaz) leképezés, amelyre $\varphi\varphi^{-1} = \mathrm{id}_M$ és $\varphi^{-1}\varphi = \mathrm{id}_N$. Meg kell mutatni, hogy φ modulushomomorfizmus is. Legyenek $r, s \in R$ és $n, n' \in N$ tetszőlegesek.

$$((nr + n's)\varphi^{-1})\varphi = nr + n's = ((n)\varphi^{-1}r + (n')\varphi^{-1}s)\varphi$$

Mivel φ injektív, ezért $(nr + n's)\varphi^{-1} = (n)\varphi^{-1}r + (n')\varphi^{-1}s$. □

Hasonlóan az Abel-csoportok esetéhez, tetszőleges $\varphi : M \to N$ homomorfizmus esetén, ha $L \leq M$, akkor $\varphi(L) = \{(\ell)\varphi \mid \ell \in L\}$ egy részmodulus $\operatorname{im} \varphi$-ben. Fordítva, ha $N' \leq \operatorname{im} \varphi \leq N$ egy részmodulus, akkor a $\varphi^{-1}(N') = \{m \in M \mid (m)\varphi \in N'\}$ halmaz egy $\ker \varphi$-t tartalmazó részmodulus. Tehát létezik egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés az M-beli $\ker \varphi$-t tartalmazó részmodulusok és az $\operatorname{im} \varphi$ részmodulusai között. Ezen felül igazak maradnak az Abel-csoportoknál megismert homomorfizmus-, ill. izomorfizmus-tételek.

1.17. Tétel (Homomorfizmus-tétel)**.** *Tetszőleges $\varphi : M \to N$ homomorfizmus esetén $M/\ker \varphi \cong \operatorname{im} \varphi$.*

Bizonyítás. Legyen $\gamma : M/\ker \varphi \to \operatorname{im} \varphi$ az a leképezés, amelyre $(x + \ker \varphi)\gamma = \varphi(x)$. A faktormodulus konstrukciója alapján γ művelettartó. Azt is látjuk, hogy γ szürjektív. Ezen túl, $(x + \ker \varphi)\gamma$ pontosan akkor 0, ha $x \in \ker \varphi$, tehát γ jól definiált és injektív. □

1.18. Tétel (I. izomorfizmus-tétel)**.** *Legyen $M \in$ Mod-R tetszőleges és legyenek U, V részmodulusai M-nek. Ekkor $(U + V)/V \cong U/U \cap V$.*

Bizonyítás. Legyen $\gamma : (U + V)/V \to U/U \cap V$ az a leképezés, amelyre $(u + V)\gamma = u + U \cap V$. Ismét világos, hogy γ művelettartó és szürjektív. Most $(u + V)\gamma$ pontosan akkor 0, ha $u \in V$. □

1.19. Tétel (II. izomorfizmus-tétel)**.** *Legyen $M \in$ Mod-R tetszőleges és legyenek U, V részmodulusai M-nek, amelyekre $U \leq V$. Ekkor $(M/U)/(V/U) \cong M/V$.*

Bizonyítás. Először is definiáljuk a következő $\psi : M/U \to M/V$ leképezést úgy, hogy $(m + U)\psi = m + V$. Könnyű ellenőrizni, hogy ψ homomorfizmus, amelynek magja $\ker \psi = \{m + V \mid m \in U\} = V/U$. Az homomorfizmus-tétel alapján $M/V \cong (M/U)/\ker \psi = (M/U)/(V/U)$. □

1.3. Bimodulusok, endomorfizmusgyűrűk

Általában a $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ halmaz Abel-csoport, de ennél több nem mondható. Ha azonban M vagy N (esetleg mindkettejük) rendelkezdik további (modulus) struktúrával, akkor előfurdul, hogy $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ szerkezete is gazdagabb. Egy egyszerű példa, amikor $R = A$ egy K-algebra, M és N pedig két A-modulus. A $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ ekkor nem csak Abel-csoport, de K-vektortér is, ha a $\lambda \in K$ elemmel való szorzást $(m)(\lambda\varphi) := (\lambda m)\varphi$ módon értelmezzük. Amint látni fogjuk ez a példa egy speciális esete a bimodulusok és a Hom halmazaik között lévő kapcsolatnak.

1.20. Definíció. Tegyük fel, hogy R és S gyűrű, M pedig egy Abel-csoport. Az M egy $R-S$ bimodulus (jelben ${}_RM_S$), ha egyrészt M egy bal R-modulus és jobb S-modulus, másrészt minden $m \in M, r \in R$ és $s \in S$ elemekre $(rm)s = r(ms)$ fennáll.

1.21. Példák.

- egy K test feletti vektortér $K-K$ bimodulus.
- ha A egy K-algebra, akkor $M \in \text{Mod-}A$ esetén M egy $K-A$ bimodulus.
- minden R-modulus egyben $\mathbb{Z}-R$ bimodulus is.
- az előző három példát általánosan úgy is mondhatjuk, hogy R,S gyűrűk esetén, ha létezik egy $S \to \mathrm{Cen}(R)$ gyűrűhomomorfizmus, akkor minden R modulus egyben $R-S$ bimodulusnak is tekinthető.
- az R maga is egy $R-R$ bimodulus.

1.22. Állítás. *Legyenek R,S és T gyűrűk, az ${}_SM_R$ és ${}_TN_R$ bimodulusok. Ekkor $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ egy $T-S$ bimodulus.*

Bizonyítás. Vegyünk egy tetszőleges $\varphi : M \to N$ homomorfizmust és definiáljuk először a T, ill. S elemeinek hatását φ-n. Legyen $t\varphi$ az a homomorfizmus, amely egy $m \in M$ elemhez a $t(m)\varphi \in N$, míg φs az a homomorfizmus, amely m-hez a $(sm)\varphi$ elemet rendeli.

Belátjuk, hogy ezzel $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ egy bal T-modulus, hasonlóan igazolható, hogy $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ egyben jobb S-modulus is. Tegyük fel, hogy $m, m' \in M, r \in R$ és $t, t' \in T$, illetve $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$.

$$\begin{aligned}(m+m')(t\varphi) = (t(m+m'))\varphi = t((m+m')\varphi) = t((m)\varphi + (m')\varphi) = \\ = t((m)\varphi) + t((m')\varphi) = (m)(t\varphi) + (m')(t\varphi),\end{aligned}$$

továbbá $(mr)(t\varphi) = t((mr)\varphi) = t((m)\varphi r) = (t((m)\varphi))r = (m)(t\varphi)r$ (ahol az utolsó előtti lépésnél használtuk, hogy M bimodulus). Tehát $t\varphi$ valóban egy R-homomorfizmus. Abból, hogy N egy bal T-modulus könnyen adódik, hogy $t(\varphi + \varphi') = t\varphi + t\varphi'$ és $(t+t')\varphi = t\varphi + t'\varphi$. Kell még, hogy $(tt')\varphi = t(t'\varphi)$. Vagyis hogy

$$(m)((tt')\varphi) = tt'((m)\varphi) = t(t'((m)(\varphi))) = t((m)(t'\varphi)) = (m)(t(t'\varphi)).$$

Végül bármey $s \in S$ elemet választva $(m)((t\varphi)s) = (sm)(t\varphi) = t((sm)\varphi) = (sm)(t\varphi) = (m)((t\varphi)s)$. □

1.23. Állítás. *Minden R gyűrű és M_R modulusa esetén*

$$\mathrm{Hom}_R(R, M) = \mathrm{Hom}_R({}_R R_R, M_R) \cong M_R.$$

Bizonyítás. Definiáljuk a $\gamma : M \to \mathrm{Hom}_R(R, M)$ leképezést úgy, hogy $m \in M$ esetén legyen $(m)\gamma = \varphi_m$, ahol is φ_m az a homomorfizmus, amelyre $(1)\varphi_m = m$. Az így megadott φ_m egyértelműen megad egy $R \to M$ homomorfizmust, hiszen $(r)\varphi = (1)\varphi r$ minden $r \in R$-re. Ezzel γ egy R-modulus homomorfizmus, hiszen $(1)\varphi_{m+m'} = m + m' = (1)\varphi_m + (1)\varphi_{m'}$ és $(1)\varphi_{mr} = mr = (1)\varphi_m r$. Az pedig világos, hogy γ injektív és szürjektív is. $\square$

1.24. Állítás. *Tetszőleges R gyűrű esetén az $\gamma : R \to Hom_R(R, R)$, ahol $(r)\gamma$ az r elemmel való balszorzás, egy gyűrűizmorfizmus. Azaz $R \cong \mathrm{End}_R(R)$.*

Bizonyítás. Világos, hogy γ ebben az esetben egy $R - R$ bimodulus- sőt gyűrűhomomorfizmust ad R és $\mathrm{Hom}_R(R, R)$ között. $\square$

2. Modulusok direkt összege, direkt szorzata

A fejezet során I mindig egy nem üres (esetleg végtelen) indexhalmazt jelent. Bár nem szükséges, de feltehetjük, hogy I jól rendezett.

2.1. Direkt szorzat, külső- és belső direkt összeg

2.1. Definíció. Legyen $\{M_i \mid i \in I\}$ modulusok egy indexelt halmaza.

1. A $\Pi_{i\in I} M_i$ halmaz az M_i alaphalmazok Descartes-szorzata. Tehát $\Pi_{i\in I} M_i$ egy eleme egy I-n értelmezett M_i értékű $(m_i)_{i\in I}$ kiválasztási függvény. A $\Pi_{i\in I} M_i$ halmaz R-modulussá tehető a komponensenkénti műveletekkel. Azaz $(m_i)_{i\in I} + (m'_i)_{i\in I} = (m_i + m'_i)_{i\in I}$ és $(m_i)_{i\in I} r = (m_i r)_{i\in I}$. Az így értelmezett modulust az M_i modulusok direktszorzatának nevezzük.

2. Jelölje $\oplus_{i\in I} M_i$ a $\Pi_{i\in I} M_i$ direktszorzatnak azt a részmodulusát, amelynek egy $(m_i)_{i\in I}$ pontosan akkor eleme, ha véges sok $i \in I$ kivételével $m_i = 0$. Az így kapott részmodulus az M_i modulusok (külső) direkt összege.

3. Legyen N egy tetszőleges modulus, amely előáll mint $M_i \leq N$ részmodulusainak összege, emellett tegyük fel, hogy minden $i \in I$ esetén $M_i \cap (\sum_{i\neq j} M_j) = 0$. Ekkor azt mondjuk, hogy az N modulus az M_i modulusok (belső) direkt összege. Ha I véges halmaz és N az M_i részmodulusainak direkt összege, akkor az $N = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ (szokásos) jelölést is használjuk.

2.2. Megjegyzés. Ha feltesszük, hogy $M_i \neq 0$, akkor $\Pi_{i\in I} M_i \cong \oplus_{i\in I} M_i$ pontosan akkor, ha I egy véges halmaz.

2.3. Tétel (A direkt szorzat univerzalitása)**.** *Az M modulus pontosan akkor izomorf az $M_i, i \in I$ modulusok szorzatával, ha minden $i \in I$ esetén létezik egy $\pi_i : M \to M_i$ homomorfizmus, hogy tetszőleges $\alpha_i : N \to M_i$ homomorfizmusok esetén egyértelműen létezik egy $\gamma : N \to M$ homomorfizmus, amelyre $\gamma\pi_i = \alpha_i$ fennáll minden i index esetén.*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, dashed, "\exists!\gamma"'] \arrow[dr, "\alpha_i"] & \\ M \arrow[r, "\pi_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy $M = \Pi_{i\in I} M_i$. Ekkor legyen $\pi_i : (m_i)_{i\in I} \mapsto m_i$ az i. komponensre való „vetítés". Ezzel, ha α_i adott, akkor $\gamma : n \mapsto ((n)\alpha_i)_{i\in I}$ az egyetlen – a kívánt feltételeket kielégítő – homomorfizmus.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy M rendelkezik az állításbeli tulajdonságokkal. Válasszuk N-et $\Pi_{i\in I} M_i$-nek és α_i-t az előbb definiált $(m_i)_{i\in I} \mapsto$. Ekkor egyértelműen léteznek $\gamma : \Pi_{i\in I} M_i \to M$ és $\beta : M \to \Pi_{i\in I} M_i$ homomorfizmusok, amelyekre $\gamma\pi_i = \alpha_i$ és $\beta\alpha_i = \pi_i$.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, shift right, "\gamma"'] \arrow[dr, "\alpha_i"] & \\ M \arrow[u, shift right, "\beta"'] \arrow[r, "\pi_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

Ezekből $\beta\gamma\pi_i = \pi_i$. Viszont a feltételek szerint az M-hez és π_i homomorfizmusokhoz egyértelműen létezik egy $i : M \to M$, amelyekkel $i\pi_i = \pi_i$. Az id_M identitás leképezés pedig megfelel ennek az i-nek. Ebből adódik, hogy $\beta\gamma = \mathrm{id}_M$, így az 1.16. Állítás miatt $M \cong \Pi_{i\in I} M_i$. □

2.4. Tétel (A direkt összeg univerzalitása)**.** *Az M modulus pontosan akkor izomorf az $M_i, i \in I$ modulusok direkt összegével, ha minden $i \in I$ esetén létez $\iota_i : M_i \to M$ homomorfizmus, hogy tetszőleges $\alpha_i : M_i \to M$ homomorfizmusok esetén egyértelműen létezik egy $\gamma : M \to N$ homomorfizmus, amelyre $\iota_i\gamma = \alpha_i$ fennáll minden i index esetén.*

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & M \arrow[d, dashed, "\exists!\gamma"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Bizonyítás. Az egyik irányhoz ismét feltehetjük, hogy $M = \oplus_{i\in I} M_i$. Legyen $\iota_i : M_i \to M$ az i. komponens beágyazása, azaz $(m_i)\iota_i$ minden i-től különböző komponense $((m_i)\iota_i)_{i'\in I}\pi_j = 0$, míg $((m_i)\iota_i)_i = m_i$. Ekkor a $\gamma : (m_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I}(m_i)\alpha_i$ az az egyetlen homomorfizmus, amely kielégíti kívánt feltételeket.

A másik irányra vonatkozó állítás a direkt szorzatra vonatkozó analóg tétel bizonyotása szerint elvégezhető. □

2.2. Modulusok direkt felbontása

2.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy $N \leq M$ direkt összeadandója M-nek ($N \overset{\oplus}{\leq} M$), ha létezik olyan $U \leq M$ modulus, hogy $N \oplus U = M$. Ilyen esetben az U-t az N direkt kiegészítőjének hívjuk.

2.6. Definíció. Azt mondjuk, hogy az M modulus (direkt) felbonthatatlan, ha $M = M' \oplus M''$ esetén M' vagy M'' maga az M.

2.7. Megjegyzés. Általában, ha $N \overset{\oplus}{\leq} M$ az N direkt kiegészítője nem egyértelmű. Például, ha M egy két dimenziós K feletti vektortér egy rögzített b_1, b_2 bázissal, akkor az $N = \langle b_1 \rangle$ altér direkt összeadandó és direkt kiegészítője lehet az $U_1 = \langle b_2 \rangle$ vagy $U_2 = \langle b_1 + b_2 \rangle$ altér is.

Megjegyezzük még, hogy egy $N \leq M$ részmodulus pontosan akkor direkt összeadandó, ha direkt kiegészítője is M valamely részmodulusának. Továbbá, ha $M = N \oplus U$, akkor $M/U \cong N$.

2.8. Állítás. *Legyen $N \leq M \in \text{Mod-}R$. Ekkor létezik M-ben olyan U részmodulus, amelyre $N \cap U = 0$ és U maximális erre a tulajdonságra nézve. Tetszőleges $0 \leq L \leq M$ részmodulus esetén $(N + U) \cap L \neq 0$.*

Bizonyítás. Tekintsük az alábbi $\mathcal{V} = \{V \leq M \mid V \cap N = 0\}$ halmazt. A halmaz nem üres és a tartalmazásra nézve parciálisan rendezett. Ha $\mathcal{L}$ egy lánc $\mathcal{V}$-ben akkor $\sum \mathcal{L} = \cup \mathcal{L}$ szintén $\mathcal{V}$-nek eleme. Ehhez elég látni, hogy egy $\sum \mathcal{L}$-beli elem $\ell_1 + \ldots + \ell_n$ alakú, ahol minden $1 \leq i \leq n$ esetén ℓ_i valamely $\mathcal{L}$-beli halmazból való, így létezik egy legnagyobb $\mathcal{L}$-beli L részmodulus, amely mindegyik ℓ_i-t és az összegüket is tartalmazza. Tehát, ha $\sum \ell_i \in N$, akkor $\sum \ell_i \in L \cap N = 0$. A Zorn-lemma miatt $\mathcal{V}$-nek van maximális eleme, ez lehet U.

Az állítás második feléhez tekintsünk egy $V \leq M$ részmodulust, és tegyük föl, hogy $V \cap (N + U) = 0$. Ezzel viszont $V + U \cap N = 0$ és $U \lneq V + U$, ami ellentmondana U maximális tulajdonságának. □

2.9. Állítás. *Legyen N az M részmodulusa, továbbá $\iota : N \to M$ a természetes beágyazás. Az N pontosan akkor direkt összeadandó, ha létezik egy $\pi : M \to N$ homomorfizmus, amelyre $\iota\pi = \text{id}_N$.*

Bizonyítás. A szükségességhez rögzítsünk egy U direkt kiegészítőt N-ben és π-t válasszuk az U szerinti természetes homomorfizmusnak. Ekkor $\pi : (n, u) \mapsto n$, emiatt $(n)\iota\pi = (n, 0)\pi = n$.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy valamely $\pi : N \to M$-re $\iota\pi = \text{id}_N$. Akkor világos, hogy $\ker \iota\pi = \text{im } \iota \cap \ker \pi = 0$. Elég megmutatni, hogy $\text{im } \iota + \ker \pi = M$. Legyen $m \in M$ tetszőleges. Ekkor $(m)\pi\iota \in \text{im } \iota$, továbbá $(m - (m)\pi\iota)\pi = (m)\pi - ((m)\pi)\iota\pi = 0$ miatt $m - (m)\pi\iota \in \ker \pi$. Tehát $m \in \text{im } \iota + \ker \pi$. □

Megjegyezzük, hogy akárcsak a direkt kiegészítő, úgy a 2.9. Állításban szereplő π homomorfizmus sem egyértelmű. Viszont egy U direkt kiegészítő egyértelműen meghatározza π-t és viszont. Az természetesen világos, hogy akárhogy is választjuk U-t, a kapott π egy epimorfizmus. Sőt π minden esetben az ι *gyenge értelemben vett inverzének* is tekinthető. Az ilyen tulajdonságú homomorfizmusok kiemelten fontosak a direkt felbontások tanulmányozásánál.

2.10. Definíció. Egy $\alpha : N \rightarrowtail M$ monomorfizmusról azt mondjuk, hogy felhasadó monomorfizmus, ha létezik olyan $\beta : M \to N$, hogy $\alpha\beta = \text{id}_N$.

Egy $\beta : M \twoheadrightarrow N$ epimorfizmusról azt mondjuk, hogy felhasadó epimorfizmus, ha létezik olyan $\alpha : N \to M$, hogy $\alpha\beta = \text{id}_N$.

A felhasadó mono/epimorfizmus fogalmával még egy jellemzés adható M direkt felbontására vonatkozóan.

2.11. Állítás. *Az alábbi állítások tetszőleges $M, N \in \text{Mod-}R$ esetén ekvivalensek:*

(i) az N izomorf M egy direkt összeadandójával;

(ii) *létezik egy* $\alpha : N \rightarrowtail M$ *felhasadó monomorfizmus;*

(iii) *létezik egy* $\beta : M \twoheadrightarrow N$ *felhasadó epimorfizmus;*

Bizonyítás. A 2.10. Definíció jelöléseit és a 2.9. Állítás-t használva, im α-t válasszuk N-nek a még bizonyítandó következtetésekhez. $\square$

Arra jutottunk, hogy egy N részmodulus pontosan akkor direkt összeadandója M-nek, ha van olyan ι (N-ből M-be képező) monomorfizmus, amely felhasad. Azonosítsuk N-et a ι általi képvel és rögzítsünk egy U direkt kiegészítőt a hozzátartozó π (felhasadó) epimorfizmussal együtt. Akkor most azt is mondhatjuk, hogy π az $M = N \oplus U$ direkt felbontáshoz tartozó N komponensre való vetítés. Másképp, $M = N \oplus U$ felbontáshoz egyértelműen létezik egy $\pi \in \mathrm{End}_R(M)$, amelyre $\ker \pi = U$, $\mathrm{im}\,\pi = N$ és π az N elemeit fixen hagyja. Ez a direkt felbontás egy újabb jellemzéséhez vezet.

2.12. Definíció. Legyen R egy tetszőleges gyűrű és e, f a gyűrű tetszőleges elemei. Azt mondjuk, hogy e idempotens, ha $ee = e^2 = e$, az e primitív idempotens, ha $e = e_1 + e_2$ esetén e_1 és e_2 csak úgy lehet egyszerre idempotens, hogy valamelyikük a 0. Az e és f iempotensek ortogonálisak, ha $ef = fe = 0$. Az $e_1, \ldots, e_n$ ortogonális idempotensek halmaza teljes, ha $e_1 + \ldots + e_n = 1$.

2.13. Lemma. *Tegyük fel, hogy ,* $M \in \text{Mod-}R$ *és* $e \in \mathrm{End}_R(M)$ *egy idempotens elem. Ekkor* $(1-e)$ *is idempotens elem és*

$$\begin{aligned} \ker e &= \{m \in M \mid m = (m)(1-e)\} = \mathrm{im}\,(1-e) \\ \mathrm{im}\ e &= \{m \in M \mid m = (m)e\} = \ker(1-e). \end{aligned}$$

Ezen felül $M = Me \oplus M(1-e)$.

Bizonyítás. Mivel $e^2 = e$, ezért $(1-e)^2 = (1-e)$, továbbá $e(1-e) = (1-e)e = 0$. Ezek szerint

$$\begin{aligned} \mathrm{im}\ e \le \{m \in M \mid m = (m)e\} \le \ker(1-e), \\ \mathrm{im}\,(1-e) \le \{m \in M \mid m = (m)(1-e)\} \le \ker(1-e). \end{aligned}$$

Az első tartalmazások megfordításai mindig igazak. A második tartalmazáshoz vegyük észre, hogy minden $m \in M$ felírható mint $(m)e + (m)(1-e)$.

Az állítás második feléhez már csak annyit kell megmutatni, hogy $(M)e \cap (M)(1-e) = 0$. Valóban, ha $(m)e = (m')(1-e)$, akkor $(m)e = (m)e^2 = (m')(1-e)(e) = 0$. $\square$

2.14. Állítás. *Legyen az* M *modulus egy dirkekt felbontása* $M = N \oplus U$. *Ekkor egyértelműen létezik egy* $e \in \mathrm{End}_R(M)$ *idempotens, hogy* $N = (M)e$ *és* $U = (M)(1-e)$.

Bizonyítás. Láttuk, hogy a felbontáshoz pontosan egy olyan $\pi \in \mathrm{End}_R(M)$ tartozik, amire $\ker \pi = U, \mathrm{im}\ \pi = N$ és minden $n \in N$ esetén $(n)\pi = n$. Világos, hogy π idempotens, $(M)\pi = N$ és a 2.13. Lemma szerint $\ker \pi = (M)(1-\pi) = U$. $\square$

2.15. Állítás. *Minden* $i \in I$ *esetén legyen* $M_i \le M$. *Az* M *pontosan akkor áll elő mint az* M_i *modulusok (belső) direkt összege, ha létezik idempotens elemeknek (szükségképpen egyértelmű)* $\{e_i \mid i \in I\}$ *részhalmaza* $\mathrm{End}_R(M)$*-ben, hogy minden* i *esetén*

$$M_i = \mathrm{im}\ e_i \quad \text{és} \quad \sum_{j \ne i} M_i = \ker e_i.$$

Bizonyítás. Az eddigiek alapján világos, hogy az megadott tulajdonságokkal rendelkező e_i idempotensek létezése szükséges. Tegyük fel, hogy léteznek a fenti $e_i \in \mathrm{End}_R(M)$ idempotensek. A 2.13. Lemma szerint bármely i index esetén $\mathrm{im}\, e_i \cap \ker e_i = 0$. Viszont (szintén a 2.13. Lemma miatt) $\mathrm{im}\, e_i + \ker e_i = M$, tehát az M_i részmodulusok generálják is M-et. $\square$

2.16. Következmény. *Ha e_i az $M = \oplus_i M_i$ felbontáshoz tartozó idempotensek, akkor az e_i idempotensek páronként ortogonálisak. Ezen felül minden $0 \neq m \in M$ esetén csak véges sok $i \in I$ index létezik, amelyire $(m)e_i \neq 0$.*

Bizonyítás. Először is, ha $j \neq i$, akkor $M_j \leq \sum_{k \neq i} M_k = \ker e_i$, azaz $M e_i e_j = 0$ minden $i \neq j$ párra. Másodszor, minden $m \in M$ benne van M_i-k generátumában, azaz $m \in \sum_i M_i$, vagyis m előáll mint egy véges $m = m_{i_1} + \ldots + m_{i_n}$ összeg. Ekkor viszont, ha $j \neq i_k$, akkor $(m)e_j = 0$. $\square$

2.3. Gyűrűk direkt felbontása

2.17. Állítás. *Az M modulus pontosan akkor áll elő $M_1, \ldots, M_n$ részmodulusainak direkt összegeként, ha létezik $e_1, \ldots, e_n \in \mathrm{End}_R(M)$ ortogonális idempotensek egy teljes rendszere, hogy minden i-re* $\mathrm{im}\, e_i = M_i$.

Bizonyítás. Legyen $e_1, \ldots, e_n$ idempotens az $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ felbontáshoz. A 2.16. szerint $e_1, \ldots, e_n$ páronként ortogonális, másrészt $m = (m)e_1 + \ldots + (m)e_n$ minden m esetén, tehát $1 = e_1 + \ldots + e_n$.

Fordítva, ha $e_1, \ldots, e_n$ ortogonális idempotensek teljes rendszere, akkor $m = (m)(e_1 + \ldots + e_n) = (m)e_1 + \ldots + (m)e_n$, másrészt $M_i = \mathrm{im}\, e_i$ és $\ker e_i = \sum_{j \neq i} M_j$. A bizonyítás befejezéséhez használjuk a 2.15. Állítást. $\square$

A továbbiakban az R gyűrű egy speciális modulusának, a (jobb) reguláris R_R modulus direkt felbontását vizsgáljuk. Először is fontos észrevenni, hogy minden $M \leq R_R$ egy jobbideál R-ben. Tehát R_R minden felbontása jobbideáljainak direkt összegére való bontás. Az előző alfejezetben láttuk, hogy miként áll kapcsolatban egy modulus direkt felbontása és bizonyos endomorfizmusai. Mielőtt továbblépnénk, emlékeztetünk, hogy az R mint jobb modulus elemein egy r elemmel való szorzás az R_R egy endomorfizmusa és minden (modulus)endomorfizmusa R_R-nek egy alkalmas r elemmel való balszorzásnak tekinthető (1.24. Állítás). Emiatt, ha a $\varphi \in \mathrm{End}_R(R_R)$ endomorfizmus hatását mindig a neki megfelelő $r \in R$ elemmel való balszorzásként írjuk.

2.18. Lemma. *Az R_R tetszőleges $R_R = \oplus_{i \in I} M_i$ direkt felbontása esetén véges sok olyan $i \in I$ index létezik, amelyre $M_i \neq 0$.*

Bizonyítás. Vegyük az $R_R = \oplus_{i \in I} M_i$ felbontáshoz tartozó e_i idempotenseket (2.15.). Ekkor $e_i 1$ csak véges sok i esetén nem 0 (2.16.). Ám $M_i = \mathrm{im}\, e_i = Re_i = Re_i 1$. $\square$

2.19. Megjegyzés. Fontos megjegyezni, hogy bár az R_R direkt felbontásaiban a nem 0 tagok száma mindig véges, előfordulhat, hogy egy rögzített R gyűrű esetén az R_R nem 0 direkt összeadandóinak száma nincs korlátozva.

2.20. Tétel. *Az R_R pontosan akkor áll elő az $M_1, \ldots, M_n$ balideáljainak direktösszegeként, ha létezik $e_1, \ldots, e_n$ ortogonális idempotensek teljes rendszere R-ben, amelyre $M_i = e_i R$.*

Ezen felül, az $R = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ pontosan akkor gyűrű direkt felbontás, ha $e_i \in \mathrm{Cen}(R)$ minden i-re.

Bizonyítás. Az állítás első része következik az 1.24. és 2.17. Állításból. A második részben az elégségesség egyszerűen adódik abból, hogy ha minden e_i centrális, akkor bármely i indexre $Re_iR = e_iRR = e_iR$ tényleg ideál. A szükségességhez tegyük fel, hogy minden i-re M_i ideálja R-nek. Ezzel, ha $i \neq j$, akkor $M_iM_j \subseteq M_i \cap M_j = 0$. Tetszőleges $r \in R$ esetén $r = e_1r + \ldots + e_nr = \sum_{i=1}^n e_ir_i$, ahol $e_ir = r_i$, ha $i \neq j$. Másrészt $r = \sum_{i=1}^n r_i \sum_j e_j = \sum_{i=1}^n r_ie_i$. Azaz minden $r \in R$ előáll mint $\sum_{i=1}^n e_ire_i$, ami az összes e_j-vel felcserélhető. □

2.21. Lemma. *Legyen e_i, e_j az R gyűrű idempotens elemei. Ekkor létezik egy* $\mathrm{Hom}_R(e_iR, e_jR) \cong e_jRe_i$ *Abel–csoport-izomorfizmus.*

Bizonyítás. Tekintsük azt a $\gamma : \mathrm{Hom}_R(e_iR, e_jR) \to e_jRe_i$ hozzárendelést, amely egy $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(e_iR, e_jR)$ homomorfizmushoz az $(e_i)\varphi$-t rendeli. Mivel $(e_i)\varphi \in e_jR$ és $(e_i)\varphi = (e_ie_i)\varphi = (e_i)\varphi e_i$, ezért valóban $(\varphi)\gamma \in e_jRe_i$. A γ és a $\mathrm{Hom}_R(e_iR, e_jR)$-beli összeadás definíciójából azonnal következik, hogy γ egy Abel–csoport-homomorfizmus.

Tegyük fel, hogy $(\varphi)\gamma = 0$, vagyis $(e_i)\varphi = 0$. Ekkor tetszőleges $r \in R$ esetén $(e_ir)\varphi = (e_i)\varphi r = 0r = 0$, tehát $\varphi = 0$, amiből azt kapjuk, hogy γ injektív. Legyen most $r \in e_jRe_i$ tetszőleges. Akkor a $\varphi : e_i \to r$ hozzárendelés (egyértelműen) meghatároz egy $e_iR \to e_jR$ modulus-homomorfizmust. Ezért γ szürjektív is. □

2.22. Állítás. *Tegyük fel, hogy az $R_R = \oplus_{i=1}^n M_i$ az R reguláris modulusának egy direkt felbonthatatlan komponensekre való bontása. Legyen $G = (V, E)$ az a gráf amelynek csúcshalmaza az $\{1, 2, \ldots, n\}$ indexhalmaz és él köt össze egy i, j pontpárt, ha $\mathrm{Hom}_R(M_i, M_j) \neq 0$ (vagy $\mathrm{Hom}_R(M_j, M_i) \neq 0$). Legyenek a $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_t$ az így kapott G gráf összefüggő komponensei. Ekkor minden $1 \leq j \leq t$ esetén a $\mathcal{B}_j = \oplus_{i \in \mathcal{K}_j} M_i$ az R gyűrű ideálja, sőt $\mathcal{B}_j$, mint gyűrű, direkt felbonthatatlan.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{K}$ a G gráf egy komponense, és $\mathcal{B}$ a hozzátartozó balideál. Az állítás első feléhez elég megmutatni, hogy $R\mathcal{B} \leq \mathcal{B}$. A 2.21. Lemma szerint $\mathrm{Hom}(e_iR, e_jR) = 0$ akkor és csak akkor, ha $e_jRe_i = 0$. Ezt és a 2.20. Tételt felhasználva

$$R\mathcal{B} = \sum_{i=1}^n M_i \sum_{j \in \mathcal{K}} M_j = \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{K}} e_jR \sum_{i \in \mathcal{K}} e_iR}_{R\mathcal{B}} + \underbrace{\sum_{j \notin \mathcal{K}} e_jR \sum_{i \in \mathcal{K}} e_iR}_{\sum_{\substack{j \notin \mathcal{K} \\ i \in \mathcal{K}}} e_jRe_iR = 0}$$

adódik, vagyis $\mathcal{B}$ valóban ideál.

Megmutatjuk, hogy $\mathcal{B}$ felbonthatatlan. Legyen $\mathcal{B} = I_1 \oplus I_2$ gyűrű direkt összeg. Az $f = \sum_{j \in \mathcal{K}} e_j$ a $\mathcal{B}$-ben egység. Legyen $I_1 = f_1R$ és $I_2 = f_2R$, ahol $f = f_1 + f_2$ az f egy ortogonális idempotensekre való bontása. Minden $j \in \mathcal{K}$ indexre az $fM_j = f_1M_j \oplus f_2M_j$, ám mivel M_j felbonthatatlan, vagy $f_1M_j = 0$ vagy $f_2M_j = 0$. Ez $\mathcal{K}$-nak egy további diszjunkt $\mathcal{K} = \mathcal{K}' \cup \mathcal{K}''$ felbontását adja. Ez által írhatjuk, hogy $I_1 = \oplus_{j \in \mathcal{K}'} M_j$ és $I_2 = \oplus_{j \in \mathcal{K}''} M_j$. A $\mathcal{K}$ a G egy összefüggő komponense volt, ezért található olyan $i \in \mathcal{K}'$ és $j \in \mathcal{K}''$, amelyekre $\mathrm{Hom}_R(M_i, M_j) \neq 0$ vagy $\mathrm{Hom}_R(M_j, M_i) \neq 0$. Feltehetjük, hogy az előző áll fenn. Akkor viszont $0 \neq e_jRe_i \subseteq I_1 \cap I_2$, ami ellentmondás. □

2.23. Következmény. *Tegyük fel, hogy az $R_R = \oplus_{i=1}^n M_i$ az R reguláris modulusának egy direkt felbonthatatlan komponensekre való bontása. Legyenek $\mathcal{B}_i$-k a 2.22. Állításban definiált gráf különböző komponenseihez tartozó felbonthatatlan ideálok. Ekkor $R \cong \mathcal{B}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}_t$ gyűrűk izomorfizmusa, a $\mathcal{B}_i$-t az R gyűrű egy* blokk*jának nevezzük.*

3. Szabad-, projektív- és injektív modulusok

3.1. Definíció. Legyen X az M modulus elemeinek egy részhalmaza. Az M az X által generált szabad modulus, ha bármely $N \in \text{Mod-}R$ és $\varphi : X \to N$ halmazleképezés esetén egyértelműen létezik egy $\bar{\varphi} : M \to N$ homomorfizmus, hogy $\bar{\varphi}\mid_X = \varphi$.

Egy M modulus szabad, ha valamely részhalmaza szabadon generálja.

3.2. Tétel. *Az $M \in \text{Mod-}R$ pontosan akkor szabad, ha $M \cong \oplus_{i\in I} R_R$ valamilyen I index halmazra.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy $\oplus_{i\in I} R_R$ tényleg szabad. Egy i index esetén legyen $x_i \in R_R$ az az elem, amelynek az i. komponense 1 a többi pedig 0. Megmutatjuk, hogy $X = \{x_i \mid i \in I\}$ egy szabad generátora $\oplus_{i\in I} R_R$-nek. Legyen $\varphi : X \to N$ tetszőleges halmaz leképezés. Minden $m \in \oplus_{i\in I} R_R$ egyértelműen írható $\sum_i x_i r_i$ alakba, így a $\bar{\varphi} : \sum_i x_i r_i \mapsto \sum_i (x_i)\varphi r_i \to N$ leképezés egy homomorfizmus. Az $m \in \oplus_{i\in I} R_R$ egyértelmű felírása miatt $\bar{\varphi}$ is egyértelmű.

A másik irányhoz rögzítsünk egy $Y = \{y_i \mid i \in I\} \subseteq M$ szabad generátort M-ben. Legyen $F = \oplus_{i\in I} R_R$. Legyen $\varphi : Y \to F$ az a halmaz leképezés, amely y_i-t az előbb definiált x_i elembe képezi. A feltétel szerint φ kiterjed egy $\bar{\varphi} : M \to F$ homomorfizmussá. Ez szükségképpen szürjektív, hiszen $\{x_i \mid i \in I\}$ az F egy generátora. Viszont φ injektív is, mert ha $\left(\sum_{i\in I} y_i r_i\right)\varphi = 0$, akkor $\sum_{i\in I} x_i r_i = 0$, emiatt pedig $r_i = 0$ minden i-re, az x_i-k függetlensége miatt. $\square$

3.3. Definíció. A $P \in \text{Mod-}R$ projektív, ha tetszőleges $\alpha : M \twoheadrightarrow N$ és $\beta : P \to N$ homomorfizmusok esetén létezik $\gamma : P \to M$ homomorfizmus, amivel $\gamma\alpha = \beta$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\beta"] \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma"'] \\ M \arrow[r, two heads, "\alpha"] & N \end{tikzcd}$$

3.4. Állítás. *Bármely R gyűrű felett*

1., bármely F szabad modulus projektív;

2., ha P projektív, akkor minden direkt összeadandója is projektív;

3., projektív modulusok direkt összege is projektív.

Bizonyítás. Először is legyen $F := F(X)$, ahol $X = \{x_i \mid i \in I\}$ szabad generátor. Rögzítsünk egy $\alpha : M \twoheadrightarrow N$ és $\beta : F(X) \to N$ homomorfizmust. Mivel α szürjektív, ezért minden $(x_i)\beta \in N$ elemnek létezik egy m_i ősképe M-ben. Legyen $\varphi : X \to M$ az a halmazleképezése, amelyre $(x_i)\varphi = m_i$. Ez kiterjed egy $\bar{\varphi} : F \to M$ homomorfizmussá. Válasszuk $\bar{\varphi}$-t γ-nak. Ekkor bármely x_i generátorra $(x_i)\gamma\alpha = (x_i)\varphi\alpha = (m_i)\alpha = \beta(x_i)$. Mivel x_i elemek generálják F-et, $\gamma\alpha = \beta$ adódik.

Másodszor tegyük fel, hogy P projektív modulus előáll mint $P = U \oplus V$. Rögzítsünk egy $\alpha : M \twoheadrightarrow N$ és $\beta : U \to N$ homomorfizmust. Ha $\iota : U \to P$ a természetes beágyazás, akkor a 2.9. Állítás szerint létezik egy $\pi : P \to U$, hogy $\iota\pi = \mathrm{id}_U$. Mivel P projektív,

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[d, shift left, "\pi"] \arrow[ddl, dashed, "\exists\delta"'] \\
& U \arrow[u, shift left, "\iota"] \arrow[d, "\beta"] \\
M \arrow[r, two heads, "\alpha"] & N
\end{tikzcd}$$

létezik egy $\delta : P \to M$ homorfizmus, amire $\delta\alpha = \pi\beta$. Viszont akkor $\iota\delta\alpha = \iota\pi\beta = \beta$. Tehát $\iota\delta$ választható γ-nak.

A harmadik állításhoz legyen P_i projektív modulus minden $i \in I$ esetén. Képezzük a $P = \oplus_{i\in I}$ direkt összeget és rögzítsünk egy $\alpha : M \twoheadrightarrow N$ és $\beta : P \to N$ homomorfizmust. Vegyük a direkt összeg univerzalitása (2.4. Tétel) szerint létező $\iota_i : P_i \to P$ homomorfizmusokat. Mivel minden P_i modulus projektív,

$$\begin{tikzcd}
& P_i \arrow[d, "\iota_i"] \arrow[ddl, dashed, "\exists\gamma_i"'] \\
& P \arrow[d, "\beta"] \\
M \arrow[r, two heads, "\alpha"] & N
\end{tikzcd}$$

ezért léteznek $\alpha_i : P_i \to M$ homomorfizmusok, amelyekkel $\gamma_i\alpha = \iota_i\beta$. Szintén direkt összeg univerzalitása miatt létezik egy egyértelmű $\gamma : P \to M$ homomorfizmus, hogy minden i esetén $\iota_i\gamma = \gamma_i$. Ez a γ a keresett, hiszen $\gamma_i\alpha = \iota_i\gamma\alpha = \iota_i\beta$. Azaz mind $\gamma\alpha$, mind β kommutatívvá teszi a

$$\begin{tikzcd}
P_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[dr, "\iota_i\beta"'] & P \arrow[d, dashed, "\beta = \alpha\gamma"] \\
& N
\end{tikzcd}$$

diagramot, a direkt összeg univerzalitása miatt, azonban ekkor $\alpha\gamma = \beta$. □

3.5. Állítás. *Tetszőleges P modulusra az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) *P projektív;*

(ii) *minden $\alpha : M \twoheadrightarrow P$ felhasadó epimorfizmus, és $M \cong \ker\alpha \oplus P$;*

(iii) *a P egy direkt összeadandója valamely szabad F modulusnak.*

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: legyen P projektív és tekintsük az alábbi diagramot.

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[d, "\mathrm{id}_P"] \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma"'] \\
M \arrow[r, two heads, "\alpha"] & P
\end{tikzcd}$$

A feltételek szerint $\gamma\alpha = \mathrm{id}_P$, tehát α felhasadó epimorfizmus és a 2.9., ill. 2.11. Állítás alapján $M \cong \ker\alpha \oplus P$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Minden modulus homomorf képe egy szabadnak, azaz létezik egy $F = \oplus_{i\in I} R_R \twoheadrightarrow P$ epimorfizmus. (ii) szerint, ekkor $P \overset{\oplus}{\leq} F$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: a 3.4. Állítás első szerint F projektív, míg az állítás harmadik része miatt a $P \overset{\oplus}{\leq} F$ direkt összeadandója szintén az. □

3.6. Megjegyzés.

- Minden K feletti vektortér projektív (K-)modulus.
- Egy M Abel-csoport pontosan akkor projektív, ha szabad, hiszen szabad Abel-csoport részcsoportja is szabad.
- Ahogy később látni fogjuk, ha A egy véges dimenziós K-algebra, akkor minden projektív modulusa előáll, mint A_A felbonthatatlan direkt összeadandóinak egy direkt összege.
- Legyen $R_R = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n$ a reguláris modulus egy direkt felbontása, ahol minden i indexre $P_i = e_i R$ és $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ ortogonális idempotensek egy teljes rendszere (ld. 2.20.). A 3.4. Állítás szerint az P_i modulusok projektívek. Tegyük fel, hogy minden i-re P_i felbonthatatlan. Ekkor minden végesen generált P projektív R-modulus előáll mint egy P_i modulusokból álló (szükségképpen véges) direk tösszeg. Speciálisan minden felbonthatatlan projektív R-modulus valamelyik P_i-vel izomorf. Legyen ugyanis $P \in \text{mod-}R$ projektív. Ekkor P homomorf képe egy végesen generált szabad modulusnak, azaz létezik egy $F = \oplus_{j=1}^t R_R \twoheadrightarrow P$ epimorfizmus. A 3.5. Állítás miatt ekkor P az F direkt összeadandója és a Krull-Shmidt–tétel miatt $P \cong \oplus_i P_i^{j_i}$.

3.7. Definíció. A $Q \in \text{Mod-}R$ injektív, ha tetszőleges $\alpha : M \rightarrowtail N$ és $\beta : M \to Q$ homomorfizmusok esetén létezik $\gamma : N \to Q$ homomorfizmus, amivel $\alpha\gamma = \beta$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & N \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

3.8. Állítás. *Bármely gyűrű felett*

1., egy injektív modulus direkt összeadandója is injektív;

2., injektív modulusok direkt szorzata szintén injektív.

Bizonyítás. Először is legyen a Q injektív modulus egy direkt felbontása $Q = U \oplus V$. Tekintsünk egy $\alpha : M \rightarrowtail N$ és egy $M \to U$ homomorfizmust. Legyen $\iota : U \to Q$ a természetes beágyazás és legyen $\pi : Q \to U$ az $U \oplus V$ felbntáshoz tartozó felhasadó epimorfizmus (2.9.). Mive Q injektív,

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[ddl, dashed, "\exists\delta"'] \\
U \arrow[d, shift right, "\iota"'] & \\
Q \arrow[u, shift right, "\pi"'] &
\end{tikzcd}
$$

ezért létezik egy $\delta : N \to Q$, amivel $\beta\iota = \alpha\delta$. Válasszuk γ-t $\delta\pi$-nek, így $\alpha\gamma = \alpha\delta\pi = \beta\iota\pi = \beta$.

A második állításhoz tegyük föl, hogy a Q_i modulus minden $i \in I$ index esetén injektív. Jelölje Q a Q_i modulusok $\Pi_{i\in I} Q_i$ direkt szorzatát, és legyen $\alpha : M \rightarrowtail N$, ill. $\beta : M \to Q$ tetszőleges. Tekintsünk egy i indexet és az indexhez tartozó $\pi_i : Q \to Q_i$ homomorfizmust (ld. 2.3. Tétel). Használjuk, hogy Q_i projektív,

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[ddl, dashed, "\exists\gamma_i"'] \\
Q \arrow[d, "\pi_i"'] & \\
Q_i &
\end{tikzcd}
$$

így kapjuk, hogy léteznek $\gamma_i : N \to Q_i$ homomorfizmusok, amelyekkel $\beta\pi_i = \alpha\gamma_i$. A direkt szorzat univerzalitása miatt, létezik egy egyértelmű $\gamma : N \to Q$ homomorfizmus, amellyel $\gamma\pi_i = \gamma_i$ minden i indexre. Így mind $\alpha\gamma$, mind β kommutatívvá teszi a

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[d, dashed, "\beta = \alpha\gamma"'] \arrow[dr, "\beta\pi_i"] & \\
Q \arrow[r, "\pi_i"'] & Q_i
\end{tikzcd}
$$

diagramot. A direkt szorzat univerzalitása miatt azonban ez a homorfizmus egyértelmű, tehát $\alpha\gamma = \beta$. $\square$

3.9. Állítás. *Tetszőleges Q modulus esetén az alábbi állítások ekvivalensek.*

(*i*) *a Q modulus injektív;*

(*ii*) *bármely $\alpha : Q \rightarrowtail M$ monomorfizmus felhasadó.*

Bizonyítás. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*): tegyük föl, hogy Q injektív és tekintsük az alábbi diagramot.

$$
\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Q"'] & N \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma"] \\
Q &
\end{tikzcd}
$$

A diagram kommutatív, vagyis $\alpha\gamma = \mathrm{id}_Q$, azaz α felhasadó monomorfizmus.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Legyen $\alpha : M \rightarrowtail N$ és $\beta : M \to Q$ tetszőleges. Tekintsük az α, β által meghatározott (ún. *push-out*) diagramot,

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & N \arrow[d, "\bar\iota_1"] \\
Q \arrow[r, "\bar\iota_2"'] & U
\end{tikzcd}$$

ahol $U = (N \oplus Q)/\{((m)\alpha, -(m)\beta) \mid m \in M\}$, és a $\bar\iota_1$ az $n \in N$ elemhez az $(n, 0)$, míg $\bar\iota_2$ a $q \in Q$-hoz a $(0, q)$ mellékosztályt rendeli. Ezzel a diagram kommutatív, hiszen tetszőleges $m \in M$-re $(m)\alpha\bar\iota_1 - (m)\beta\iota_2$ az $((m)\alpha, -(m)\beta)$ mellékosztály, ami a 0 az U-ban. Megmutatjuk, hogy $\bar\iota_2$ injektív. Ha $q \in Q \in \ker\bar\iota_2$, akkor létezik olyan $m \in M$, hogy a $(0, q) = ((m)\alpha, -(m)\beta)$. Az első komponens egyenlősége miatt $0 = (m)\alpha$, de α injektív, tehát $m = 0$ és így $q = 0$. Az (i) feltétel szerint $\bar\iota_2$ felhasadó monomorfizmus, ezért van egy $\pi : U \to Q$, amellyel $\bar\iota_2\pi = \mathrm{id}_Q$. Válasszuk γ-t $\bar\iota_1\pi$-nek. Erre $\alpha\bar\iota_1\pi = \beta\bar\iota_2\pi = \beta$. $\square$

3.10. Állítás (Baer–kritérium)**.** *Legyen Q egy R-modulus. A Q pontosan akkor injektív, ha tetszőleges $\alpha : M \rightarrowtail R$ és $\beta : M \to Q$ esetén van olyan $\gamma : R \to Q$, hogy $\alpha\gamma = \beta$.*

3.11. Definíció. Legyen $M \in \text{Mod-}R$. Azt mondjuk, hogy M osztható, ha bármely $m \in M$ és $0 \neq r \in R$ estén az $m = xr$ egyenlet megoldható M-ben x-re.

3.12. Állítás. *Egy $\mathbb{Z}$-modulus pontosan akkor injektív, ha osztható.*

Bizonyítás. Legyen Q egy injektív Abel-csoport, $n \in \mathbb{Z}$ bármely egész. Tekintsük az alábbi diagramot.

$$\begin{tikzcd}
n\mathbb{Z} \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & \mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma"] \\
Q &
\end{tikzcd}$$

Jelölje q a $(n)\beta$ elemet. Az $x = (1)\gamma$ megoldása az $xn = q$ egyenletnek.

Fordítva, ha Q osztható, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$, $\iota_n : n\mathbb{Z} \rightarrowtail \mathbb{Z}$ természetes beágyazás és $q \in Q$ esetén az $nx = q$ egyenletnek van egy $h \in Q$ megoldása. Így, ha $\beta : n\mathbb{Z} \to Q$ olyan, hogy $(n)\beta = q$, akkor legyen $\gamma : \mathbb{Z} \to Q$ az a homomorfizmus, amelyre $\gamma : 1 \mapsto h$. Ezzel $\iota_n\gamma = \beta$. $\square$

3.13. Megjegyzés.

- Könnyű belátni, hogy az osztható Abel-csoportok direkt összege, faktora szintén osztható Abel-csoport. Így, bár általában injektív modulusok direkt összege nem injektív, az Abel-csoportok esetén mégis.
- A $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ Abel-csoportok injektívek.
- Az Abel-csoportok körében az injektívek pontosan $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ faktorainak direkt összegei.
- Ha A egy véges dimenziós K-algebra, akkor minden injektív A-modulus véges dimenziós injektív modulusok direkt összegére bomlik.

4. Gráfalgebrák

Ebben a fejezetben definiáljuk véges dimenziós algebrák egy releváns osztályát, megadjuk az ezen algebrákhoz tartozó modulusok egy lehetséges (grafikus) ábrázolását. Legyen Γ egy véges irányított gráf, azaz Γ véges sok pontból és véges sok nyílból áll, többszörös élek, hurkok esetlteg előfordulhatnak. Ekkor a $K\Gamma$ algebra egy bázisát adják a Γ-beli irányított séták, beleértve a 0 hosszú utakat is. Egy u és v séta uv szorzata legyen 0, ha u végpontja nem egyezik v kezdőpontjával, különben pedig uv legyen a két séta „összeillesztése”. Ez a művelet nyilvánvalóan asszociatív a báziselemekre nézve. A szorzást $K\Gamma$ összes elemére (azaz a Γ-beli séták K együtthatós formális lineáris kombinációira) disztributívan kiterjesztve egy K-algebra struktúrát kapunk.

4.1. Példa. Tegyük fel, hogy a Γ gráfot az alábbi három pont és három nyíl alkotja.

$$\begin{tikzcd} 1 \bullet \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & \bullet\ 2 \\ & \underset{3}{\bullet} \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

A $K\Gamma$ bázisa $\{e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta, \gamma, \beta\gamma\}$, ahol e_i az i. ponthoz tartozó 0 hosszú út. Néhány elempár szorzata: $\alpha e_1 = 0$ vagy $(e_1+e_2+e_3)(\beta+\gamma) = e_1\beta+e_3\gamma+0 = \beta+\gamma$. Általában is a 0 hosszú utak összege az algebra egység eleme.

4.2. Állítás. *Legyen Γ egy n pontú gráf, e_i az i. ponthoz tartozó 0 hosszú út. Ekkor $K\Gamma_{K\Gamma} = \oplus_{i=1}^{n} e_i K\Gamma$ és $P_i = e_i K\Gamma$ projektív.*

Bizonyítás. Az állítás közvetlen következménye a 2.20. Tételnek, hiszen $\sum_{i=1}^{n} e_i = 1$ és $e_i e_j = 0$, amint $i \neq j$. $\square$

4.3. Példa. A 4.1. Példában $P_1 = e_1 K\Gamma = \langle e_1\text{-ből induló utak}\rangle = \langle e_1, \alpha, \beta\rangle$, ugyanígy $P_2 = \langle e_2\rangle$ és végül $P_3 = \langle e_3, \gamma\rangle$.

4.4. Megjegyzés. Előfordulhat, hogy $K\Gamma$ végtelen dimenziós. Például, ha Γ az alábbi

$$\begin{tikzcd} \bullet\ 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

egypontú gráf egyetlen egy nyíllal, akkor $K\Gamma = K\langle e_1, \alpha, \alpha^2, \ldots\rangle \cong K[\alpha]$. Általában $K\Gamma$ pontosan akkor véges dimenziós, ha Γ véges és (irányított) körmentes.

4.5. Definíció. Legyen $K\Gamma_+$ a $K\Gamma$ algebra beli pozitív hosszú séták generátuma. Azt mondjuk, hogy az $I \triangleleft K\Gamma$ megengedett, ha

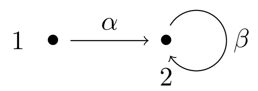
$$I \subseteq (K\Gamma_+)^2 \quad \text{és} \quad \exists m: \ (K\Gamma_+)^m \subseteq I.$$

Egy A algebra gráfalgebra, ha egy véges Γ gráfhoz tartozó $K\Gamma$ algebrának egy megengedett I ideál szerinti $K\Gamma/I$ faktora.

4.6. Megjegyzés. Minden gráfalgebra véges dimenziós.

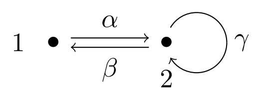
4.7. Példák.

1., Legyen Γ az alábbi gráf.



A $K\Gamma$ egy bázisa $\{e_1, e_1, \alpha\beta^k, \beta^\ell \mid k, \ell \in \mathbb{N}\}$. Ha $I = (\alpha\beta^2, \beta^3)$ és $A = K\Gamma/I$, akkor $A = \langle e_1, e_2, \alpha, \beta, \alpha\beta, \beta^2\rangle$ és $\dim_{\mathrm{K}} A = 6$.

2., Tekintsük a következő Γ' gráfot, és a $K\Gamma'$-nek $I' = (\alpha\gamma, \beta\alpha - \gamma^2)$ ideálját. Ebben az esetben a $K\Gamma'/I'$ egy bázisa $\{e_1, e_1, \alpha, \beta, \gamma, \gamma^2 = \beta\alpha, \gamma\beta, \alpha\beta, \beta\alpha\beta\}$, így $\dim_{\mathrm{K}} K\Gamma'/I' = 9$.



Azt, hogy a gráfalgebrák mennyire tág részét képezik a véges dimenziós algebrák osztályának, az alábbi 4.8. Tétel mutatja. Először is megállapítjuk, hogy ha A egy véges dimenziós algebra, akkor A_A mindig felbomlik véges sok felbonthatatlan jobbideál direkt összegére. Egy ilyen direkt felbontáshoz mindig tartozik $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortogonális idempotensek egy teljes rendszere (2.17.), amelyekkel a felbontás

$$A_A = Ae_1 \oplus \ldots \oplus Ae_n,$$

és a Krull-Schmidt–tétel szerint minden felbonthatatlanokra történő felbontás ezzel ekvivalens. Ha az e_iA modulusok páronként nem izomorfak, akkor azt mondjuk, hogy A egy bázis algebra.

4.8. Tétel (Gabriel–tétel)**.** *Ha A egy véges dimenziós bázis algebra a K algebrailag zárt test felett, akkor létezik egy Γ véges gráf és $K\Gamma$ algebrának egy megengedett I ideálja, hogy $A \cong K\Gamma/I$.*

4.1. Loewy–diagramok

A továbbiakban a gráfalgebrák feletti modulusok egy lehetséges megadását ismertetjük. Tegyük fel, hogy $A = K\Gamma/I$ egy gráf algebra úgy, hogy Γ pontjai $1, \ldots, n$, a pontokhoz tartozó idempotensek $e_1, \ldots, e_n$. Legyen $M \in$ Mod-A és tekintsük M nek az alábbi (vektortér) direkt felbontását.

$$M = M1 = M\sum_{i=1}^{n} e_i = \oplus Me_i = \oplus M_i.$$

Azt vizsgáljuk, hogy az A elemei hogyan hatnak az M_i altereken. Ehhez elég megadni az A-beli (nem 0) nyilak hatását. Minden α nyíl esetén az α hatása egy lineáris $M \to M$ leképezés. Ha $\alpha : i{\to}j$, akkor az α-val való szorzás hatására

$$M \xrightarrow{\alpha} M\alpha \subseteq M_j, \text{ azaz } M_i \xrightarrow{\alpha} M_j \text{ és } M_k \subseteq \ker\alpha, \forall k \neq i.$$

Válasszunk (ha lehet) egy-egy alkalmas bázist az M_i alterekben. Célunk a nyilak hatásának leírása amennyire csak lehet. A legszerencsésebb, ha úgy választunk bázist, hogy minden nyíl minden bázis elemet báziselembe vagy 0-ba visz. Az is világos, hogy elég M felbonthatatlan direkt összeadandóin megadni a nyilak hatásait.

4.9. Példa. Tekintsük a 4.7. első példáját, tehát $A = K\Gamma/I$, ahol a Γ

$$\begin{tikzcd} \underset{1}{\bullet} \arrow[r, "\alpha"] & \underset{2}{\bullet} \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

és I az $(\alpha\beta^2, \beta^3)$ ideál. Legyen $M = A_A$ a reguláris modulus, válasszuk $M_1 = A_A e_1$ és $M_2 = A_A e_2$ bázisának az $\{e_1\}$ és $\{e_2, \alpha, \alpha\beta, \beta, \beta^2\}$. Ezzel A_A Loewy diagramja

$$A_A = \begin{tikzcd} e_1 \arrow[d, "\alpha"'] \\ \alpha \arrow[d, "\beta"'] \\ \alpha\beta \end{tikzcd} \oplus \begin{tikzcd} e_2 \arrow[d, "\beta"'] \\ \beta \arrow[d, "\beta"'] \\ \beta^2 \end{tikzcd}$$

ahol a be nem rajzolt nyilak hatása 0. Tovább egyszerűsíthetjük a diagramot, ha a bázis elemek helyett csak azt tüntetjük fel, hogy az adott bázis elem milyen indexű M_i altérből való.

$$A_A = \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\alpha"'] \\ 2 \arrow[d, "\beta"'] \\ 2 \end{tikzcd} \oplus \begin{tikzcd} 2 \arrow[d, "\beta"'] \\ 2 \arrow[d, "\beta"'] \\ 2 \end{tikzcd}$$

Sőt, ha egyetlen $i \to j$ típusú nyíl létezik (mint a jelen példánál is), akkor a jelölés még tovább egyszerűsíthető,

$$A_A = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \end{array} \oplus \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 2 \end{array}$$

ha megállapodunk abban, hogy a nyilak irányítását lefelé gondoljuk.

Tehát egy M modulus rögzített bázisához írhatjuk fel egy Loewy-diagramját. A diagramról sok információ olvasható le. Láthatjuk a modulus K-dimenziója, bázis-elemek által generált részmodulusai és az ezek szerinti faktorok, de egy kompozíció lánc is könnyen kapható. A példánkban az $e_1 A$ modulus α által generált rész modulusa

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \end{array} \text{ és az általa vett faktora } \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \end{array} \Big/ \begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \cong 1, \text{ ami egy egyszerű modulus.}$$

Az $e_i A$ modulus egy kompozíciólánca

$$0 \leq 2 \leq \begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \leq \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \end{array}$$

ahol a faktorok egyszerűek, hiszen 1-dimezniósak. Vegyük észre, hogy bármely S egyszerű modulushoz pontosan egy i index létezik, hogy $S = Se_i$ és $Se_j = 0$, ha $i \neq j$. Emellett minden $a \in K\Gamma_+/I$ elemmel $Sa = 0$.

Még mindig az A algebra fölött vegyük azt az N (3-dimenziós) modulust, amelynek Loewy–diagramja

$$N = \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] 1 \arrow[dr, "\alpha"] & & 2 \arrow[dl, "\beta"'] \\ & 2 & \end{tikzcd}$$

Az N valóban egy A-modulus, megkaphatjuk az $A_A/A_A(\alpha - \beta)$ faktormodulusként. Látjuk, hogy az ${}_KN$ vektortér az $N_1 \oplus N_2$ vektorterek direkt összege, $\dim_K N_1 = 1$ és $\dim_K N_2 = 2$. Legyen $N_1 = \langle b_1 \rangle$ és $N_2 = \langle c_1, c_2 \rangle$ a Loewy–diagramhoz tartozó bázisok, azaz

$$N = \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] b_1 \arrow[dr, "\alpha"] & & c_1 \arrow[dl, "\beta"'] \\ & c_2 & \end{tikzcd}$$

Ekkor az α, ill. β nyíl (mint $N_1 \to N_2$, ill. $N_2 \to N_2$ lineáris leképezés) hatása megadható az

$$\alpha : N_1 \xrightarrow{[0\ 1]} N_2, \quad \text{ill.} \quad \beta : N_2 \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]} N_2$$

mátrixos alakkal is.

A teljesség kedvéért a 4.7 második példájában szereplő algebra reguláris modulusának Loewy–diagramját is felírjuk. Ebben az esetben $B = K\Gamma'/I'$, ahol Γ' az

$$\begin{tikzcd} \underset{1}{\bullet} \arrow[r, shift left, "\alpha"] & \underset{2}{\bullet} \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[loop right, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

gráf és az I' ideál az $(\alpha\gamma, \beta\gamma - \gamma^2)$. A B_B Loewy–diagramja pedig

$$B_B = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \oplus \begin{tikzcd}[column sep=tiny, row sep=tiny] & 2 \arrow[dl, dash, dashed] \arrow[dr, dash, dashed] & & \\ 1 \arrow[dr, dash, dashed] & & 2 \arrow[dr, dash, dashed] & \\ & 2 \arrow[ur, dash, dashed] & & 1 \\ & 1 & & \end{tikzcd}$$

Megjegyezzük, hogy a modulusok homomorfizmusai is könnyen követhetők Loewy–diagramjaikon. Általában, ha $\varphi : M \to N$ egy A-modulusok közötti homomorfizmus, az $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ és az $N = N_1 \oplus \ldots \oplus N_n$ a két modulus $e_i \in A$ idempotensek szerinti vektortérfelbontása, akkor minden $1 \leq i \leq n$ esetén $\operatorname{im} \varphi\,|_{M_i} \leq N_i$, hiszen ha $m = me_i$, akkor $(me_i)\varphi = (m)\varphi e_i \in N_i$. Ez a diagramok esetén azt jelenti, hogy adott indexű altér csak ugyanolyan indexű altérbe képződhet, és emellett természetsen a nyilak hatására továbbra is tekintettel kell lennünk.

4.10. Példa. Legyen A ismét a 4.7 első példájában lévő algebra, azaz

$$A_A = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \end{array} \oplus \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 2 \end{array}$$

és tekintsük az A fölötti M, N modulusokat, amelyek Loewy–diagramjai

$$M = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \end{array} \quad \text{és} \quad N = \begin{tikzcd}[column sep=tiny, row sep=tiny] 1 \arrow[dr, dash, dashed] & & 2 \arrow[dl, dash, dashed] \\ & 2 & \end{tikzcd}$$

Adjuk meg az $M \to N$, illetve $N \to M$ modulus homomorfizmusokat! Ehhez először célszerű felírni a diagramokhoz tartozó bázist, azaz

$$M = \begin{tikzcd} b_1 \arrow[d, "\alpha"'] \\ c_1 \arrow[d, "\beta"'] \\ c_2 \end{tikzcd} \quad \text{és} \quad N = \begin{tikzcd} b'_1 \arrow[dr, "\alpha"] & & c'_1 \arrow[dl, "\beta"'] \\ & c'_2 & \end{tikzcd}$$

Láthatjuk, hogy M ciklikus modulus, amelyet generál b_1, ezért elég egy homomorfizmus megadásához b_1 képét megadni. A b_1 bázis elem M_1-ből való, ezért képe csak $N_1 = \langle b'_1 \rangle$, lehet. Egy φ (nem 0) homomorfizmus esetén tehát $(b_1)\varphi = \lambda b'_1$, valamely $\lambda \in K \setminus \{0\}$-ra, emiatt $(c_1)\varphi = (b_1\alpha)\varphi = (b_1)\varphi\alpha = \lambda c'_1$ és ugyanígy $(c_2)\varphi = 0$.

Fordítva, vizsgáljuk most az $N \to M$ homomorfizmusokat. Most a b'_1 elem képe csak $\langle b_1 \rangle$-beli lehet. Tegyük föl, hogy $\psi : N \to M$ olyan, hogy $(b'_1)\psi = \lambda c_1$ valamilyen $\lambda \in K$ skalárra. Akkor azt kapjuk, hogy $0 = (b'_1\alpha\beta)\psi = (b'_1)\psi\alpha\beta = \lambda(b_1\alpha\beta) = \lambda c_2$. Vagyis λ csak 0 lehet. Emiatt, bármely $\psi : N \to M$ esetén $b'_1 \in \ker\psi$ és persze c'_2 szintén $\ker\psi$-beli. A c_1 az N_2 altérből való, emiatt $(c'_1)\psi \in M_2 = \langle c_1, c_2 \rangle$, azaz $(c'_1)\psi = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$ megfelelő $\lambda_i \in K$ skalárokkal. Viszont akkor $(c'_1\beta)\psi = \lambda_1 c_2$ és $c'_1 \in \ker\psi$ miatt $\lambda_1 = 0$. Tehát $(c'_1)\psi = \lambda c_2$ lehet csak.

5. Jacobson–radikál és féligegyszerűség

5.1. Maximális részmodulusok, egyszerű modulusok

5.1. Definíció. Az $N \leq M$ modulus maximális, ha $N \neq M$ és ha $N \leq L \leq M$, akkor $L = M$ vagy $L = N$.

5.2. Lemma. *Ha S egy egyszerű modulus, akkor minden $0 \neq \varphi : S \to M$ homomorfizmus mono és minden $0 \neq \psi : M \to S$ homomorfizmus epi.*

Bizonyítás. Mind $\ker\varphi$, mind $\operatorname{im}\psi$ részmodulusok S-ben. □

5.3. Lemma. *Egy S modulus pontosan akkor egyszerű, ha R_R egy maximális $U \leq R_R$ részmodulus szerinti faktorával izomorf.*

Bizonyítás. Az világos, hogy minden modulus maximális részmodulusa szerint vett faktora egyszerű. Így elég azt belátni, hogy ha S egyszerű, akkor előáll R_R homomorf képeként. Ha $0 \neq s \in S$, akkor sR egy nem 0 részmodulus S-ben, amely – S egyszerűsége miatt – maga az S. Tehát S ciklikus is, és ezért az R_R homomorf képe, hiszen $\varphi : 1 \mapsto s$ egy szürjektív $R_R \to S$ homomorfizmust definiál. □

Megállapíthatjuk, hogy az egyszerű modulusok és a maximális részmodulusok kapcsolatban állnak. Fontos kérdés, hogy egy..

5.4. Állítás. *Ha $S_1, \ldots, S_m$ páronként nem izomorf egyszerű modulusok, akkor létezik $\varphi : R_R \twoheadrightarrow S_1 \oplus \ldots \oplus S_m$ epimorfizmus.*

Bizonyítás. Tekintsük az $S_1, \ldots, S_m$ (indexelt) egyszerű modulusok $\Pi_{i=1}^m$ direkt szorzatát. Mivel az indexhalmaz véges, $\Pi_{i=1}^m \cong \oplus_{i=1}^m$. Az 5.3. Lemma szerint mindegyik S_i az R_R egy alkalmas faktora, azaz léteznek $\varphi_i R_R \twoheadrightarrow S_i$ epimorfizmusok. A direkt szorzat univerzalitását (2.3.) használva

$$\begin{tikzcd} \oplus_{j=1}^m S_j = \Pi_{j=1}^n S_j \arrow[rr, "\pi_i"] & & S_i \\ & R_R \arrow[ul, dashed, "\exists\varphi"] \arrow[ur, "\varphi_i"'] & \end{tikzcd}$$

találunk olyan $\pi : R_R \to \oplus_{j=1}^m S_j$ homorfizmust, amellyel $\varphi\pi_i = \varphi_i$. Láthatjuk, hogy im φ-nek minden S_i homomorf képe, tehát minden i-hez van egy maximális $0 \leq U_\leq \operatorname{im} \varphi \leq \oplus_{j=1}^m S_j$, hogy $\operatorname{im} \varphi / U_i \cong S_i$. Minden $0 \leq U_\leq \operatorname{im} \varphi$ az im φ egy kompozícióláncává finomítható, mivel $\operatorname{im} \varphi \leq 0 \leq U_\leq \operatorname{im} \varphi$, ezért minden ilyen lánc véges is. A Jordan-Hölder–tétel szerint im φ minden kompozíciólánca ugyanolyan hosszú és ugyanolyan faktorokat tartalmaz. Így im φ bármely kompozíciólánca az összes S_i-t tartalmazza kompozíciófaktorként, emiatt a hossza legalább m, és mivel $\operatorname{im} \varphi \leq \oplus_{j=1}^m S_j$, ezért im φ kompozícióhossza legfeljebb m. Ebből $\operatorname{im} \varphi = \oplus_{j=1}^m S_j$ adódik. □

5.5. Állítás. *Bármely R gyűrű esetén, ha N az M végesen generált modulus egy részmodulusa, akkor N benne van M egy maximális részmodulusában.*

Bizonyítás. Legyen az M modulus egy generátora $\{m_1, \dots m_n\}$ és $K \leq M$ tetszőleges részmodulusa. Tekintsük az $\mathcal{N} = \{K \leq N \mid N \neq R_R\}$ halmazt. Ez egy nem üres halmaz , amely a tartalmazásra nézve parciálisan rendezett. Vegyünk egy $\mathcal{L}$ láncot $\mathcal{N}$-ben. Ennek $\sum \mathcal{L} = \cup \mathcal{L}$ egy felső korlátja és benne van $\mathcal{N}$-ben, ugyanis ha $\cup \mathcal{L} = M$ pontosan akkor, ha $\cup \mathcal{L}$ tartalmazza az $m_1, \dots, m_n$ generátorokat. Mivel a generátorok száma véges, ezért ebben az esetben van olyan $L \in \mathcal{L}$, hogy minden $m_i \in \mathcal{L}$. Akkor viszont $M = \sum_i m_i R \leq L$ volna, ami ellentmond $L \in \mathcal{N}$-nek. Eszerint $\mathcal{L}$-nek van $\mathcal{N}$-ben felső korlátja, a Zorn-lemma miatt pedig így van $\mathcal{N}$-nek egy maximális U eleme, amely egy K-t tartamlazó maximális részmodulus M-ben. □

5.6. Következmény. *Tetszőleges R gyűrű esetén R_R minden valódi részmodulusa benne van egy maximális részmodulusban.*

5.7. Megjegyzés. Nem igaz minden modulusra az 5.5. Állítás-beli tulajdonság. Például a ${}_\mathbb{Z}\mathbb{Q}$ modulusnak egyáltalán nincs maximális részmodulusa. Ennek természetesen az az oka, hogy $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Z}$ felett nem végesen generált.

Ha nem tesszük föl, hogy az R gyűrű egységelemes, akkor szintén nem igaz 5.6. állítása sem.

5.2. Féligegyszerű modulusok

Lineáris algebrából ismert tény, hogy bármely vektortér (K-modulus) fölbontható 1-dimenziós alterek direkt összegére. Továbbá minden vektortér rendelkezik bázissal, minden független rendszer kiegészíthető egy bázissá, és emiatt minden altérnek létezik direkt kiegészítője. Ebben az alfejezetben azokat az R-modulusokat vizsgáljuk, amelyek hasonló tulajdonsággal rendelkeznek. Ezek a féligegyszerű modulusok.

5.8. Definíció. Az M modulus féligegyszerű, ha egyszerű modulusok direkt összege, azaz létezik S_i $(i \in I)$ egyszerű modulusok indexelt halmaza, hogy $M = \oplus_{i \in I} S_i$.

5.9. Állítás. *Bármely M modulusra az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) M féligegyszerű;

(*ii*) *M egyszerű modulusok generátuma;*

(*iii*) *minden $U \leq M$ részmodulushoz létezik $V \leq M$, hogy $M = U \oplus V$.*

Bizonyítás. Az $(i) \Rightarrow (ii)$ triviális. A $(ii) \Rightarrow (iii)$-hoz válasszunk egy tetszőleges U részmodulust M-ben. Válasszunk U-hoz V maximális kiegészítőt (ld. 2.8. Állítás). Akkor $U \cap V = 0$ és $U + V = U \oplus V \leq M = \sum_{i\in} S_i$ valamely I indexhalmazzal. Amennyiben $U \oplus V \neq M$, úgy van olyan i, hogy $S_i \not\leq U \oplus V$. Emiatt viszont $(U \oplus V) \cap S_i$ valódi részmodulus S_i-ben, az S_i egyszerűsége miatt 0. Viszont akkor $U \cap (S_i \oplus V) = 0$, ami ellentmond V maximalitásának. Tehát $U \oplus V = M$.

A $(iii) \Rightarrow (i)$ irányt több lépésben látjuk be. Először is megmutatjuk, hogy a (iii)-beli tulajdonság öröklődik részmodulusokra. Legyen ugyanis $N \leq M$ és tegyük fel, hogy M-re teljesül (iii). Válasszunk egy $U \leq N$ részmodulust. Akkor van olyan $V \leq M$, hogy $U \oplus V = M$. Emiatt

$$N = (U \oplus V) \cap N \;\Rightarrow\; N = U + (V \cap N) = U \oplus (V \cap N),$$

a moduláris azonosság (1.10.) és $U \cap V = 0$ miatt. Azt kaptuk, hogy a $V \cap N$ direkt kiegészítő N-ben U-hoz. A következő lépés belátni, hogy ha M modulusra teljesül (iii), akkor M-nek van egyszerű részmodulusa. Ehhez feltehetjük, hogy M ciklikus, hiszen minden modulusnak van ciklikus részmodulusa, és (iii) erre öröklődik. Tegyük fel tehát, hogy $M = mR$. Speciálisan M végesen generált, ezért az 5.5. Állítás szerint van U maximális részmodulusa, amelynek (iii) miatt van V (szükségképpen) egyszerű direkt kiegészítője. A befejezéshez tegyük föl, hogy M-re teljesül (iii). Tekintsük most az $\mathcal{U} = \{U \leq M \mid U = \sum_j S_j,\, j \in J\}$ halmazt. Ez az előző észrevétel alapján nem üres, és persze tartalmazásra nézve parciálisan rendezett. Tetszőleges $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{U}$ lánca esetén $\sum \mathcal{L}$ szintén egyszerűek generátuma, ezért $\mathcal{L}$-nek egy $\mathcal{U}$-beli felső korlátja. A Zorn-lemma miatt $\mathcal{U}$-ban van U maximális elem. Indirekt tegyük föl, hogy $U \neq M$, akkor viszont van U-hoz V direkt kiegészítő, amelynek van egyszerű $S \leq V$ részmodulusa. Ez ellentmond U maximalitásának, hiszen $U \lneq U + S$ és $U + S$ is egyszerűek generátuma. □

5.10. Állítás. *Egy R gyűrű feletti féligegyszerű M modulus összes részmodulusa, faktora féligegyszerű, és féligegyszerű R-modulusok (tetszőleges) direkt összege féligegyszerű.*

Bizonyítás. Az 5.9. Állítás bizonyításában láttuk, hogy az állításbeli (iii) tulajdonság részmodulusokra öröklődik. A direkt összegre vonatkozó állítás a definícióból azonnal adódik.

A faktormodulusra vonatkozó állításhoz legyen $\varphi : M \twoheadrightarrow N$. Az 5.9. Állítás (ii) pontja szerint $M = \sum_{i\in I} S_i$, akkor viszont $N = \sum_{i\in I} (S_i)\varphi$, és az 5.2. Lemma miatt $(S_i)\varphi$ vagy egyszerű vagy 0. □

5.11. Definíció. Az R gyűrű féligegyszerű, ha minden $M \in \text{Mod-}R$ féligegyszerű modulus.

5.12. Állítás. *Az R gyűrű pontosan akkor féligegyszerű, ha az R_R reguláris modulus féligegyszerű.*

Bizonyítás. Az egyik irány triviális. A másik irányhoz használjuk, hogy tetszőleges $M \in \text{Mod-}R$ előáll valamely $\oplus R_R$ homomorf képeként. Az 5.10. Állítás alapján M is féligegyszerű. □

5.13. Tétel (Wedderburn-Artin–tétel). *Bármely R gyűrű esetén az alábbi állítások ekvivalensek.*

(*i*) *R féligegyszerű gyűrű;*

(*ii*) *R ferdetest feletti mátrix gyűrűk véges (gyűrű) direkt összege.*

5.3. Modulusok talpa, radikálja

Az 5.9. Állítás szerint egy modulus pontosan akkor féligegyszerű, ha egyszerű-ek generátuma. Emiatt minden modulus tartalmaz egy legnagyobb féligegyszerű részmodulust.

5.14. Definíció. Az M modulus talpa $\operatorname{soc} M = \sum\{S \leq M \quad mid\ S$ egyszerű$\}$.

5.15. Definíció. Az $N \leq M$ részmodulusra azt mondjuk, hogy lényeges ($N \trianglelefteq M$), ha bármely $0 \neq L \leq M$ esetén $L \cap N \neq 0$.

5.16. Lemma. *Bármely $K \leq L \leq M$ és $H \leq M$ modulusra teljesül:*

1., $K \trianglelefteq M$ pontosan akkor, ha $K \trianglelefteq L$ és $L \trianglelefteq M$;

2., $H \cap K \trianglelefteq M$ pontosan akkor, ha $H \trianglelefteq M$ és $K \trianglelefteq M$.

Bizonyítás. Vegyünk egy $N \leq M$ részmodulust.

1., Először tegyük fel, hogy $K \trianglelefteq L$, $L \trianglelefteq M$ és $N \cap K = 0$. Ekkor persze $(N \cap L) \cap K$ is 0, viszont akkor $N \cap L = 0$ és $N = 0$.

A másik irányhoz K lényeges M-ben. Ha $N \cap L = 0$, akkor nyilván $N \cap K = 0$, amiből $N = 0$. Mivel L összes részmodulusa M-nek is részmodulusa, bármely $L' \leq L$ esetén $L' \cap K = 0$-ból a feltétel szerint $L' = 0$ következik.

2., Az egyik irány következik 1., állításból.

A megfordításhoz tegyük fel, hogy mind H, mind K lényeges M-ben, akkor $(H \cap K) \cap N = 0$-ból $K \cap N = 0$, amiből pedig $N = 0$ adódik.

□

5.17. Állítás. *Bármely M modulus esetén* $\operatorname{soc} M = \cap\{L \mid L \trianglelefteq M\}$.

Bizonyítás. Két irányú tartalmazással. Először is, ha $L \trianglelefteq M$, akkor bármely S egyszerű részmodulus esetén $S \cap L \neq 0$, és így $S \leq L$. Azaz $\operatorname{soc} M \leq L$. Fordítva, legyen $H = \cap\{L \mid L \trianglelefteq M\}$. Megmutatjuk, hogy H féligegyszerű, ehhez pedig elég, hogy H rendelkezik az 5.9. Állítás-beli (*iii*) tulajdonsággal. Legyen ezért $N \leq H$. A 2.8. Állítás szerint létezik U maximális kiegészítő M-ben N-hez, amellyel $N + U \trianglelefteq M$. Ekkor $N \leq H \leq N \oplus U$ és a moduláris azonosság miatt

$$H = H \cap (N \oplus U) = N \oplus (H \cap U),$$

vagyis van N-nek H-ban direkt kiegészítője, így $H \leq \operatorname{soc} M$. □

5.18. Megjegyzés. Bár $\operatorname{soc} M$ benne van az összes lényeges részmodulusban, $\operatorname{soc} M$ maga nem feltétlenül lényeges. Például ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$-nek nincsen (valódi) egyszerű részmodulusa, ezért $\operatorname{soc}{}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} = 0$, és a 0 egyetlen (nem 0) modulusnak sem lehet lényeges részmodulusa. Az viszont igaz, hogy $\operatorname{soc} M$ a legnagyobb olyan részmodulus M-ben, amelyet minden lényeges részmodulus tartalmaz.

5.19. Állítás. *Ha M, N modulusok és $\varphi : M \to N$ egy tetszőleges homomorfizmus, akkor* $(\operatorname{soc} M)\varphi \le \operatorname{soc} N$.

Bizonyítás. A $(\operatorname{soc} M)\varphi$ féligegyszerűsége következik az 5.10. Állításból. $\square$

5.20. Következmény. *Ha $K \le M$ egy részmodulusa M-nek, akkor* $\operatorname{soc} K = \operatorname{soc} M \cap K$*, speciálisan* $\operatorname{soc}(\operatorname{soc} M) = \operatorname{soc} M$.

Bizonyítás. Tekintsük az $\iota : K \to M$ természetes beágyazást. Az 5.19. Állítás szerint $\operatorname{soc} K \le \operatorname{soc} M$. Viszont $K \cap \operatorname{soc} M$ féligegyszerű K-ban (5.10.), így $K \cap \operatorname{soc} M \le \operatorname{soc} K$. $\square$

5.21. Következmény. *A* $\operatorname{soc} M$ *pontosan akkor lényeges részmodulusa M-nek, ha minden $N \le M$ részmodulus tartalmaz egyszerű részmodulust.*

5.22. Definíció. Az M modulus (Jacobson–) radikálján – $\operatorname{rad} M$-en – az M maximális modulusainak metszetét értjük. Amennyiben M nem rendelkezik maximális részmodulussal (ld.), úgy $\operatorname{rad} M = M$.

5.23. Definíció. Az $N \le$ részmodulus kicsi M-ben ($N \ll M$), ha bármely $L \le M$ részmodulusra $L + N = M$-ből $L = M$ következik.

5.24. Lemma. *Bármely $K \le L \le M$ és $H \le M$ modulusra teljesül:*

1., $L \ll M$ pontosan akkor, ha $K \ll M$ és $L/K \ll M/K$;

2., $(H + K) \ll M$ pontosan akkor, ha $H \ll M$ és $K \ll M$.

Bizonyítás. Legyen $N \le M$ tetszőleges.

1., Tegyük fel, hogy L kicsi M-ben. Akkor, ha $(N + L)/K = M/K$, akkor $N + L + K = M$, amiből $N + L = M$, így $N = M$. Ha pedig $N + K = M$, akkor nyilván $N + L = M$, amiből megint $N = M$.

Fordítva, ha L/K kicsi M/K-ban, illetve K kicsi M-ben és $N + L = M$, akkor $(N + L)/K = M/K$, amiből $N/K = M/K$, tehát $N + K = M$, viszont K kicsi M-ben, ezért $N = M$.

2., Ha $H+K$ kicsi és $H+N = M$ (vagy $K+N = 0$), akkor $H+K+N = M$-ből $N = 0$ adódik.

Fordítva, ha mind H, mind K kicsik M-ben, akkor $H + K + N = M$-ből előbb $K + N = M$, aztán $N = M$ következik. $\square$

5.25. Lemma. *Legyen $\varphi : M \to N$ egy homomorfizmus és tegyük fel, hogy $K \ll M$. Ekkor $(K)\varphi \ll N$.*

5.26. Következmény. *Ha $L \ll M$ és $K \le L$, akkor szükségképpen $K \le M$.*

Bizonyítás. Vegyünk egy $L \le N$ modulust, amelyre $(K)\varphi + L = N$. Akkor $\operatorname{im} \varphi \le (K)\varphi + L$, így $\operatorname{im} \varphi = \operatorname{im} \varphi \cap (L + (K)\varphi)$, ami a moduláris azonosság (1.10.) miatt $(\operatorname{im} \varphi \cap L) + (K)\varphi$. Ekkor az $(\operatorname{im} \varphi \cap L)$ ősképe és K generálja M-et, emiatt $(\operatorname{im} \varphi \cap L) = \operatorname{im} \varphi$, vagyis $\operatorname{im} \varphi \le L$. Ebből viszont $L = N$ következik. $\square$

5.27. Állítás. *Bármely M modulusra* $\operatorname{rad} M = \sum\{L \mid L \ll M\}$.

Bizonyítás. Ha $L \ll M$, akkor $L \leq \text{rad } M$, különben volna olyan U maximális részmodulusa M-nek, amivel $U + L = M$. A megfordításhoz legyen $H = \sum\{L \mid L \ll M\}$.

A megfordításhoz legyen $m \in M$ tetszőleges. Ha $N \leq M$ olyan, hogy $mR + N = M$, akkor vagy $N = M$ vagy – a Zorn-lemma miatt – található olyan U maximális részmodulus M-ben, amely tartalmazza N-et, ugyanis az $\mathcal{N} = \{L \lneq M \mid N \leq L\}$ halmaz nem üres, és tetszőleges $\mathcal{L}$ láncának a $\sum \mathcal{L}$ egy felső korlátja $\mathcal{N}$-ben. (Különben volna olyan $L \in \mathcal{L}$, amely m-et tartalmazza és így L maga M volna.) Ha most $m \in \text{rad } M$, akkor nyilván a második eset nem állhat fenn, csak $N = M$. Tehát bármely $m \in \text{rad } M$ és $N \leq M$-re, valahányszor $mR + N = M$, úgy $N = M$, tehát $mR \ll M$. □

5.28. Megjegyzés. Bár rad M tartalmazza az összes kicsi részmodulusát M-nek önmaga nem feltétlenül kicsi. Például ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$-ban nincsen maximális részmodulus, emiatt $\text{rad } {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} = {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, és semelyik modulus sem lehet önmaga kicsi részmodulusa. Az viszont igaz, hogy rad M a legkisebb olyan részmodulus M-ben, amely az összes kicsi részmodulust tartalmazza.

5.29. Állítás. *Bármely M, N modulus és $\varphi : M \to N$ homomorfizmus esetén* $(\text{rad } M)\varphi \leq \text{rad } N$.

Speciálisan rad M *egy* $\text{End}_R(M)$ *részmodulus M-ben.*

Bizonyítás. Az 5.25. Állítás szerint, ha $L \ll M$, akkor $(L)\varphi \ll N$. □

5.30. Állítás. *Legyenek M, N modulusok és $\varphi : M \twoheadrightarrow N$ epimorfizmus olyan, hogy* $\text{rad } M \leq \ker \varphi$. *Ekkor* $(\text{rad } M)\varphi = \text{rad } N$.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy φ kölcsönösen egyértelműen felelteti meg M és N maximális részmodulusait. □

5.31. Következmény. *Tetszőleges M modulus esetén* $\text{rad}\,(M/\text{rad } M) = 0$.

5.32. Állítás. *Ha M minden valódi részmodulusa benne van egy maximális részmodulusban, akkor* rad M *kicsi.*

Bizonyítás. Legyen $L \leq M$, amivel $L + \text{rad } M = M$. Ha $L \neq M$, akkor L benne van egy $U \leq M$ maximális részmodulusban, amire $U + \text{rad } M = M$, de $\text{rad } M \leq U$, ami így ellentmondásra vezet. □

5.33. Következmény. *Végesen generált M modulusnak* rad M *a legnagyobb kicsi részmodulusa.*

5.4. Gyűrűk Jacobson–radikálja

5.34. Definíció. Az R gyűrű $J(R)$ (Jacobson–)radikálján az R_R modulus rad R_R radikálját értjük.

5.35. Megjegyzés. Az rögtön látszik, hogy $J(R)$ mindig jobbideál. Az 5.29. Állítás második rész szerint azonban $J(R)$ egyben $\text{End}_R(R_R)$ részmodulus is. Mivel $\text{End}_R(R_R)$ elemeinek hatását R-beli elemekkel való balról szorzás adja, így azt kapjuk, hogy $J(R)$ jobb R-modulus is, tehát ideál R-ben. Sőt, ahogy azt látni fogjuk $\text{rad } {}_R R = J(R)$. Célunk emellett minél több szemszögből jellemezni $J(R)$-t.

5.36. Definíció. Az $r \in R$ elem nilpotens, ha létezik olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $r^m = 0$. Egy I (jobb/bal) ideál nilpotens, ha van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $I^m = 0$, azaz I-ben minden m-tagú szorzat 0. Egy I (jobb/bal) ideál nil, ha minden eleme nilpotens.

5.37. Megjegyzés. Az előző definícióból tisztán látszik, hogy ha I egy nilpotens (jobb/bal) ideál, akkor minden eleme nilpotens. Azonban abból, hogy egy I (jobb/bal) ideálnak minden eleme nilpotens (azaz ő maga nil) még nem következik, hogy I nilpotens.

5.38. Lemma. *Az R-ben pontosan akkor létezik nilpotens jobb (bal) ideál, ha létezik nilpotens ideál.*

Bizonyítás. Ha I egy nilpotens jobb ideál és $I^m = 0$, akkor RI egy ideál és $(RI)^m = 0$. □

5.39. Lemma. *Legyen I egy nilpotens jobbideál R-ben és legyen M egy R-modulus. Ekkor $MI \ll M$.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy $N \leq M$ részmodulust, amire $MI + N = M$. Ekkor $MI^2 + NI = MI$, amiből az első egyenlőség miatt $MI^2 + NI + N = M$. Viszont $NI \leq N$ miatt most $MI^2 + N = M$. Azt kapjuk, hogy minden m-re $MI^m + N = M$, mivel I nilpotens $N = M$. □

5.40. Állítás. *Ha I egy nilpotens jobb ideál, akkor $I \leq J(R)$.*

Bizonyítás. Először alkalmazzuk az 5.39. Lemmát $M = R_R$-re. Azt kapjuk, hogy minden jobbideál (mint részmodulus) kicsi R-ben. Az 5.27. Állítás szerint $I \leq \operatorname{rad} R_R = J(R)$. □

5.41. Megjegyzés. Bár $J(R)$ tartalmaz minden nilpotens jobb ideált, általában nem igaz, hogy $J(R)$ nilpotens. Például legyen $R = K\llbracket x \rrbracket$-szel jelölt, x határozatlanú formális hatványsor gyűrű, azaz

$$R = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n \;\middle|\; k_n \in K \right\}.$$

Két R-beli elem összege $\sum_n k_n x^n + \sum_m k'_m x^m = \sum_n (k_n + k'_n) x^n$, míg szorzatuk

$$\sum_n k_n x^n \sum_m k'_m x^m = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} (k_i k'_{n-i}) x^n.$$

A R-nek egyetlen U maximális (jobb) ideálja van, amely a 0 *konstans* tagú hatványsorokból áll. Tehát ez az ideál megegyezik $J(R)$-rel, de pl az x eleme nem nilpotens elem.

A az 5.40. Állítás szerint $J(R)$ tartalmazza az R összes nilpotens jobbideálját, viszont az iménti megjegyzésből látjuk, hogy általában a nilpotenciával nem jellemezhetjük a radikált. Emiatt hasznos bevezetni a nilpotenciánál gyengébb fogalmat, az ún. *kvázi-reguláris* tulajdonságot.

5.42. Definíció. Egy $r \in R$ elemre azt mondjuk, hogy (jobb/bal) kvázi-reguláris, ha az $(1 - r)$ elemnek létezik (jobb/bal) inverze. Az $X \subseteq R$ részhalmaz (jobb/bal) kvázi-reguláris, ha minden eleme (jobb/bal) kvázi-reguláris.

5.43. Megjegyzés. A kvázi-reguláris tulajdonság valóban a nilpotencia egy általánosítása, hiszen minden nilpotens elem kvázi-reguláris is. Ugyanis, ha $r \in R$-re $r^n = 0$, akkor

$$(1 + r + \ldots + r^{n-1})(1 - r) = (1 - r)(1 + r + \ldots + r^{n-1}) = 1.$$

5.44. Lemma. *Az R gyűrű egy I jobbideáljára az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) *I jobb kvázi-regulárs;*

(ii) *I kvázi-reguláris;*

(iii) $I_R \ll R_R$.

Bizonyítás. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*: bármely $x \in I$ elemhez létezik olyan $y \in R$, amivel $(1-x)y = 1$. Mivel $xy \in I$ és I jobb kvázi-reguláris, ill. $y = 1 + xy = 1 - (-xy)$, ezért y-nak létezik jobb inverze. Viszont $(1 - x)$ a bal inverze, emiatt $(1 - x)$ a jobb inverze is. Tehát x kvázi reguláris.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*: legyen $K \leq R$ egy jobb ideál, amelyre $K + I = R$. Akkor van olyan $x \in I$ és $k \in K$, amellyel $x + k = 1$, amiből $1 - x = k$. Tehát k invertálható, emiatt $K = R$.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*: vegyünk egy tetszőleges $x \in I$ elemet. A feltételek szerint $I \ll R$, emiatt (5.26.) $xR \ll R$. Ám $R = xR + (1 - x)R$, amiből $(1 - x)R = R$, tehát az $(1 - x)$ elem jobb kvázi reguláris. □

5.45. Tétel (A Jacobson–radikál jellemzése)**.** *Tetszőleges R gyűrű esetén az alábbi halmazok mind megegyeznek a gyűrű $J(R)$ Jacobson–radikáljával.*

(J_1) *az R maximális jobb- (bal) ideáljainak metszete;*

(J_2) $\{x \in R \mid \forall r, s : rxs \;\; \textit{kvázi-reguláris}\}$

(J_3) $\{x \in R \mid \forall r : rx \;\; \textit{kvázi-reguláris}\}$

(J_4) $\{x \in R \mid \forall s : xs \;\; \textit{kvázi-reguláris}\}$

(J_5) *az R kvázi-reguláris jobb- (bal) ideáljainak uniója;*

(J_6) *az R kvázi-reguláris ideáljainak uniója;*

(J_7) *a legnagyobb kicsi jobb- (bal) részmodulusa R_R-nek.*

Továbbá, ha $(J_2), (J_3), (J_4), (J_5)$ és (J_6) halmazok definíciójában a kvázi-regulárist akár jobb- akár bal kvázi-regulárisra cseréljük, szintén a $J(R)$ halmazhoz jutunk.

Bizonyítás. Jelöljük J_i^*-vel a (J_i) halmazok bal oldali verzióját az $i = 1, 5, 7$ esetekben. (Például J_1^* az R balideáljainak metszete.) Világos, hogy $J_1 = J(R)$ a Jacobson–radikál definíciója szerint. Mivel R_R végesen generált, ezért $J_1 = J_7$ (ld. 5.27. és 5.33).) és az 5.44. Lemma alapján $J_7 = J_5$. Természetesen $J_1^* = J_5^* = J_7^*$. Akkor persze J_5 és J_7 szintén ideál, mert J_1 az (ld. 5.35.). Ezzel viszont $J_5 = J_6$, mert J_5 maga is egy kvázi-reguláris ideál és tartalmazza J_6-ot. Azonban J_6 definíciója oldalfüggetlen, ezért $J_6 = J_5^* = J_5$, amiből pedig $J_6^* = J_5^* = J_1^* = J_7^*$ is adódik.

A halmazok defníciójából és J_5 ideál voltából következik, hogy

$$J_5 \subseteq J_2 \subseteq J_4 \subseteq J_5$$

és

$$J_5^* \subseteq J_2 \subseteq J_3 \subseteq J_5^*.$$

Ezzel a tétel első részét beláttuk. Ami hátravan, hogy megmutassuk a (J_2) – (J_6) halmazok jobb-, illetve bal kvázi-reguláris változata szintén $J(R)$. A bal kázi-reguláris változatban

$$J_6 \subseteq J_2 \subseteq J_3 \subseteq J_5,$$

viszont az 5.44. Lemma szerint J_5 ebben az esetben is megegyezik J_6-tal. Hasonlóan a jobb kvázi-reguláris változatokra J_2, J_4, J_5^* mind ugyanaz, mint J_6, vagyis $J(R)$. A kimaradt egyenlőségek a $J_3 = J_5$ a jobb kvázi-reguláris és a $J_4 = J_5^*$ a bal kvázi-reguláris esetben. Elég az egyik egyenlőséget belátni a szimmetria miatt, vegyük például a jobb kvázi-reguláris esetet. Az világos, hogy ebben az esetben $J_1 = J_2 \subseteq J_3$. A fordított tartalmazáshoz legyen $x \in J_3$ és indirekt tegyük fel, hogy $x \notin J_1$. Ekkor (a Zorn–lemma miatt) létezik egy K maximális jobb ideál, amely nem tartalmazza x-et. Emiatt van olyan $r \in R$ és $k \in K$, hogy $1 = xr + k$. A feltételek szerint rx jobb kvázi-reguláris, legyen u egy jobb inverze. Ezzel

$$x = x(1 - rx)u = (x - xrx)u = xu - (1 - k)xu = kxu \in K,$$

ami ellentmondás, tehát azt kaptuk, hogy $Rx \subseteq J_1$. Ezzel a tétel második felét is beláttuk. □

5.46. Következmény. *Tetszőleges R gyűrű esetén*

$$\text{rad } R_R = J(R) = \text{rad } {}_R R.$$

5.47. Következmény. *Tetszőleges R gyűrű esetén $J(R)$ a legkisebb olyan ideál, amely tartalmazza az R összes nilpotens (jobb/bal) ideálját.*

5.48. Következmény. *Tetszőleges R gyűrű tetszőleges S egyszerű modulusa esetén $SJ(R) = 0$, azaz a Jacobson–radikál annulál minden egyszerű modulust.*

5.49. Állítás. *Ha I az R gyűrű egy ideálja, amelyre $J(R/I) = 0$, akkor I-t tartalmazza $J(R)$-t.*

Bizonyítás. Ha $r \notin I$, akkor van olyan U maximális jobbideálja R-nek, amely tartalmazza I-t, de nem tartalmazza r-et. Emiatt $r \notin J(R)$. □

5.50. Állítás. *Ha R és S gyűrűk, $\varphi : R \to S$ szürjektív gyűrűhomomorfizmus, akkor $(J(R))\varphi \subseteq J(S)$, továbbá, ha $\ker \varphi \leq J(R)$, akkor $(J(R))\varphi = J(S)$. Speciálisan $J(R/J(R)) = 0$.*

Bizonyítás. Ha φ szürjektív, akkor $(J(R))\varphi$ egy kvázi-reguláris ideál S-ben, az 5.45. Állítás szerint $(J(R))\varphi \subseteq J(S)$.

Ha még $\ker \varphi \leq J(R)$ is teljesül, akkor φ kölcsönösen egyértelműen felelteti meg az R maximális ideáljait és S maximális ideáljait. □

5.51. Megjegyzés. Az 5.50. Állításban a $(J(R))\varphi \subseteq J(S)$ tartalmazás általában nem szigorú. Például $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4$ természetes homomorfizmust tekintve $J(\mathbb{Z}) = 0$, de $J(\mathbb{Z}_4) = 2\mathbb{Z}_4$.

5.52. Állítás. *Tetszőleges R gyűrű esetén $J(R)$ nem tartalmaz nem 0 idempotens elemet.*

Bizonyítás. Ha $e \in J(R)$, akkor e kvázi-reguláris, azaz van olyan $u \in R$, amire $(1-e)u = 1$, azonban akkor $(1-e) = (1-e)^2 u = (1-e)u = 1$, amiből $e = 0$. $\square$

5.53. Állítás (Nakayama–lemma)**.** *Legyen I az R gyűrű egy jobb ideálja. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(*i*) *$I \leq J(R)$;*

(*ii*) *minden végesen generált M modulusra $MI = M$-ből $M = 0$ következik.*

(*iii*) *minden végesen generált M modulusban MI kicsi.*

Bizonyítás. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*): legyen M egy végesen generált nem 0 modulus. Az 5.5. Állítás szerint M-nek található egy K maximális részmodulusa. Ekkor $MJ(R) \leq K$ (5.48.).

(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*): tegyük fel, hogy $N \leq M$ és $MI + N = M$. Ekkor

$$(M/N)I = (IM + N)/N = M/N,$$

amiből $M = N$.

(*iii*) $\Rightarrow$ (*ii*): mivel R_R végesen generált $RI \ll R$. Viszont $J(R)$ tartalmazza R minden kicsi ideálját. $\square$

5.54. Állítás. *Legyen R egy gyűrű, I egy ideál R-ben, amelyre R/I féligegyszerű gyűrű. Ekkor $J(R) \leq I$.*

Bizonyítás. Jelölje $\varphi : R \to R/I$ természetes homomorfizmust. Az $M = R/I_{R_I}$ egy féligegyszerű R/I modulus és egyben egy féligegyszerű R-modulus is az $mr = m(r)\varphi$ szorzással. Legyen $R/I_R = \oplus S_i$ az S_i egyszerű R-modulusok direkt összege és legyen $\pi_i : R/I \to S_i$ a felbntáshoz tartozó i. komponensre való vetítés, továbbá $\varphi_i = \varphi\pi_i$. Ekkor $\cap \ker \varphi_i \leq I$ másrészt $\ker \varphi_i$ maximális jobbideál R-ben. Emiatt $J(R) \leq \cap\varphi_i$. $\square$

5.55. Megjegyzés. Nem igaz az 5.54. Állítás megfordítása. Ugyanis például $R = \mathbb{Z}$ esetén $J(R) = 0$ és $R/J(R) = R$ nem féligegyszerű, hiszen $\operatorname{soc} R_R = 0$ (ld.5.18).

5.5. Artin–gyűrűk

5.56. Definíció. Legyen R egy tetszőleges gyűrű és $M \in$ Mod-R . Azt mondjuk, hogy az M

- maximumfeltételes (vagy másképp Noether), ha M-ben nem létezik végtelen felszálló részmodulus lánc, azaz

  $$M_1 \leq M_2 \leq \ldots \leq M_n \ldots \leq \ldots$$

  esetén van olyan $i \in \mathbb{N}$, hogy $M_i = M_{i+j}$ minden $j \in \mathbb{N}$-re.

- minimumfeltételes (vagy másképp Artin), ha M-ben nem létezik végtelen leszálló részmodulus lánc, azaz

  $$M_1 \geq M_2 \geq \ldots \geq M_n \ldots \geq \ldots$$

  esetén van olyan $i \in \mathbb{N}$, hogy $M_i = M_{i+j}$ minden $j \in \mathbb{N}$-re.

Az R gyűrű jobb/bal Artin/Noether, ha jobb/bal reguláris modulusa minimum/maximumfeltételes.

5.57. Példák.

- Minden véges dimenziós K-algebra (jobb- és bal) Artin és Noether is, ugyanis minden jobb- és balideál egy altér.
- A $\mathbb{Z}$ egy olyan gyűrű, amely Noether, de nem Artin, hiszen a
$$\mathbb{Z} \geq p\mathbb{Z} \geq \ldots \geq p^k\mathbb{Z} \geq \ldots$$
egy végtelen leszálló ideállánc $\mathbb{Z}$-ben. Viszont $\mathbb{Z}$ főideálgyűrű, azaz minden ideálja $n\mathbb{Z}$ alakú, amely csak véges sok – $k\mathbb{Z} : k \mid n$ – alakú ideálban van benne.
- A $K[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$ végtelen változós polinomgyűrű se nem Artin, se nem Noether, hiszen az
$$(x_1) \geq (x_1^2) \geq \ldots \geq (x_1^n) \geq \ldots$$
egy végtelen leszálló ideállánc, míg az
$$(x_1) \leq (x_1, x_2) \leq \ldots \leq (x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \ldots$$
egy végtelen felszálló ideállánc $K[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$-ben.

5.58. Megjegyzés. Látjuk, hogy létezik olyan gyűrű, amely Noether, de nem Artin és látjuk, hogy létezik olyan gyűrű is, amely se nem Noether, se nem Artin. Azonban elsőre meglepő módon nem létezik olyan gyűrű, amely Artin, de nem Noether.

5.59. Állítás. *Ha az M modulus Noether (Artin), akkor M összes részmodulusa, faktora is Noether (Artin). Fordítva, ha $U \leq M$ és $M/U = N$ Noether (Artin), akkor M is Noether (Artin).*

Bizonyítás. A rész- és faktormodulusra való öröklődés nyilvánvaló. A másik irányhoz legyen $U \leq M$ és $M/U = N$ Noether (az Artin–tulajdonságra való állítás bizonyítása hasonló). Tegyük fel, hogy M-ben
$$M_1 \leq M_2 \leq \ldots \leq M_n \leq \ldots$$
részmodulusok egy felszálló lánca. Tekintsük az M_n modulusok $\varphi : M \to M/U$ természetes homomorfizmus szerinti képét, azaz legyen $N_n = M_n/(U \cap M_n)$. Mivel N maximumfeltételes, van olyan i index, ahol a lánc stabilizálódik, azaz $N_{i+j} = N_i$ minden j-re. Továbbá, mivel U is maximumfeltételes, van olyan i' index, hogy $U \cap M_{i'} = U \cap M_{i'+j}$ minden j-re. Ha $i_0 = \max\{i, i'\}$ akkor $N_{i_0} = N_{i_0+j}$ minden j-re, amiből
$$M_{i_0} = M_{i_0} + (U \cap M_{i_0}) = M_{i_0+j} + (U \cap M_{i_0+j}) = M_{i_0+j} \text{ minden } j\text{-re.}$$
□

5.60. Állítás. *Ha az R gyűrű Noether (Artin), akkor R összes ideálja, faktorgyűrűje Noether (Artin). Fordítva, ha az R gyűrű I ideálja és R/I faktora is Noether (Artin), akkor R maga is Noether (Artin).*

Bizonyítás. Hasonló az 5.59. Állítás bizonyításához. □

5.61. Állítás. *Legyen R egy tetszőleges gyűrű és legyen $M, N \in$ Mod-R . Ekkor*

1., Az M pontosan akkor Artin–tulajdonságú, ha M minden nem 0 részmodulsa tartalmaz egyszerű részmodulust.

2., Az N pontosan akkor Artin–tulajdonságú, ha N minden, az N-től különböző, részmodulusa benne van egy maximális részmodulusban.

Bizonyítás. Csak az első állítást látjuk be, a második állítás hasonlóan igazolható. Legyen $0 \neq L_1 \leq M$ egy részmodulus. Feltehetjük, hogy L_1 nem egyszerű. Ekkor viszont található egy L_2 valódi részmodulus L_1-ben. Ha ez egyszerű, akkor kész vagyunk, ellenkező esetben találhatunk egy L_3 valódi részmodulust L_2-ben, és így tovább. Mivel M minimumfeltételes, ezért az eljárás véges sok lépésben elér egy $L_n \leq L_1$ egyszerű részmodulushoz. □

5.62. Lemma. *Legyen S_i egyszerű modulus minden $i \in I$-re és legyen $M = \oplus_i S_i$. Az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) M végesen generált;

(ii) az I indexhalmaz véges;

(iii) M minimumfeltételes;

(iv) M maximumfeltételes;

Bizonyítás. □

5.63. Állítás (Fitting–lemma). *Tegyük fel, hogy az M egy olyan R-modulus, amely minimum- és maximumfeltételes is. Legyen $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$ egy tetszőleges endomorfizmus. Ekkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, amire $\ker \varphi^n \oplus \mathrm{im}\, \varphi^n = M$.*

Bizonyítás. Mivel M minimum- és maximumfeltételes is, ezért létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre a

$$\ker \varphi \leq \ker \varphi^2 \ldots \quad \text{és az} \quad \mathrm{im}\, \varphi \geq \mathrm{im}\, \varphi^2 \geq \ldots$$

részmoduluslánc is stabilizálódik, azaz $\ker \varphi^n = \ker \varphi^{n+j}$ és $\mathrm{im}\, \varphi^n = \mathrm{im}\, \varphi^{n+j}$ minden j pozitív egészre. Belátjuk, hogy ez az n az, amit kerestünk.

Elsőként $\ker \varphi^n \cap \mathrm{im}\, \varphi^n = 0$, ugyanis ha $m \in \mathrm{im}\, \varphi^n$, akkor van olyan $m' \in M$, hogy $(m')\varphi^n = m$. Erre az m'-re $(m')\varphi^{2n} = m\varphi^n = 0$, amiből $m' \in \ker \varphi^{2n} = \ker \varphi^n$, tehát $m = 0$.

Válasszunk most egy $m \in M$ elemet. Az $m\varphi^n \in \mathrm{im}\, \varphi^n = \mathrm{im}\, \varphi^{2n}$, ami miatt létezik olyan $m' \in M$, hogy $m\varphi^n = m'\varphi^{2n}$. Ebből

$$(m - m'\varphi^n)\varphi^n = 0 \;\Rightarrow\; m - m'\varphi^n \in \ker \varphi^n \;\Rightarrow\; m \in \ker \varphi^n + m'\varphi^n$$

□

Láttuk, hogy általában nem igaz, hogy az $R/J(R)$ féligegyszerű, azonban azok a gyűrűk, amelyekre $R/J(R)$ féligegyszerű kiemelten fontosak. Ezek a gyűrűk és modulusaik sok előnyös tulajdonsággal rendelkeznek. Legyen M egy tetszőleges R-modulus $J(R)$ radikállal. Ekkor $MJ(R) \leq \mathrm{rad}\, M$, hiszen az M bármely S egyszerű faktorát $J(R)$ annulálja, tehát ha $\varphi : M \to S$ egy epimorfizmus, akkor $MJ(R) \leq \ker \varphi$. Átlában a tartalmazás megfordítása nem igaz.

5.64. Állítás. *Ha R egy olyan gyűrű, amelyre $R/J(R)$ féligegyszerű, akkor minden $M \in \text{Mod-}R$ esetén $MJ(R) = \text{rad } M$.*

Bizonyítás. Az egyik irányú tartalmazást az imént indokoltuk. A másik irányhoz vegyük észre, hogy $M/MJ(R)$ egy féligegyszerű $R/J(R)$ modulus az $\bar{m}\bar{r} = \overline{mr}$ hatással, ahol $\bar{m} = m + MJ(R) \in M/MJ(R)$ és $\bar{r} = r + J(R)$. Viszont akkor $M/MJ(R)$ egyben féligegyszerű R modulus is. Emiatt $\text{rad}\,(M/MJ(R)) = 0$, tehát $\text{rad } M \leq MJ(R)$ (ld. 5.31.). $\square$

5.65. Lemma. *Legyen M egy tetszőleges modulus és legyenek M_i-k az M részmodulusai valamilyen $i \in I$ indexekkel. Ekkor létezik egy $\varphi : M/\cap_{i \in I} \rightarrowtail \Pi_{i \in I} M/M_i$ monomorfizmus.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi_i : M \to M_i$ természetes homomorfizmus. Ekkor a direkt szorzat univerzalitása miatt létezik egy $\tilde{\varphi} : M \to \Pi_{i \in I} M/M_i$ homomorfizmus, amellyel $\tilde{\varphi}\pi_i = \varphi_i$, ahol π_i-k a $\Pi_{i \in I} M/M_i$ direkt szorzathoz kanonikis $\pi_i : \Pi_{i \in I} M/M_i \to M_M i$ homomorfizmusok. Elég megmutatni, hogy $\ker \bar{\varphi} = \cap_{i \in I} M_i$. Legyen $m \in \ker \bar{\varphi}$, akkor egy tetszőleges i indexre $(m)\bar{\varphi}\pi_i = (m)\varphi_i = 0$, vagyis $m \in M_i$. $\square$

5.66. Megjegyzés. Az viszont nem mindig igaz, hogy $M/\cap_i M_i$ beágyazható volna $\oplus_i M/M_i$-be. Legyen például $M = \mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ és $M_i = i\mathbb{Z}$. Ekkor $M/\cap_i M_i = M$, de az $\oplus_i M/M_i$ minden eleme véges rendű.

5.67. Állítás. *Legyen R egy jobb Artin–gyűrű $J(R)$ radikállal. Ekkor $J(R)$ az a legkisebb ideál, amelyre $R/J(R)$ egy féligegyszerű gyűrű.*

Bizonyítás. Csak azt kell megmutatni, hogy $R/J(R)$ féligegyszerű, az állítás második része ekkor már következik az 5.54. Állításból. A $J(R)$ megkapható mint a maximális jobbideálok metszete, mivel R_R minimumfeltételes ezért $J(R)$ előáll mint véges sok maximális jobbideál metszete. Valóban, ha M_i maximális ideálok valamely $i \in I$ indexekre, akkor

$$M_1 \geq M_1 \cap M_2 \geq \ldots \geq \cap_{i=1}^n M_i \geq \ldots$$

egy leszálló jobbideállánc, amely stabilizálódik.

Tehát $J(R) = \cap_{i=1}^n M_i$ valamely n-re. Az 5.65. Lemma szerint $R_R/\cap_{i=1}^n M_i$ beágyazható $\Pi_{i=1}^n R_R/M_i$-be. Viszont minden i-re R_R/M_i egyszerű, hiszen az M_i egy maximális jobbideál, továbbá egyszerűek véges direkt szorzata féligegyszerű, amelynek részmodulusai szintén féligegyszerűek. $\square$

5.68. Következmény. *Ha az R egy jobb Artin–gyűrű $J(R)$ Jacobson–radikállal, akkor bármely M modulusára teljeseül, hogy*

1., $\text{rad } M = MJ(R)$ *és*

2., *M pontosan akkor féligegyszerű, ha* $\text{rad } M = 0$.

Bizonyítás. Az első állítás következik az 5.64. és 5.67. Állításból. A második állításhoz először is vegyül észre, ha $M = \oplus_i S_i$ féligegyszerű, akkor $\text{rad } M = \cap_i \ker \pi_i = 0$, ahol $\pi_i : M \to S_i$ a felbontáshoz tartozó kanonikus homomorfizmus. A megfordításhoz pedig, ha $\text{rad } M = 0$, akkor $MJ(R) = 0$, azaz M egy $A/J(R)$-modulus. Mivel $A/J(R)$ féligegyszerű gyűrű, ezért M féligegyszerű $A/J(R)$ modulus és féligegyszerű A-modulusként is. $\square$

5.69. Állítás. *Legyen R egy jobb Artin–gyűrű $J = J(R)$ Jacobson–radikállal. Ekkor J a legnagyobb nilpotens ideál.*

Bizonyítás. Elég belátni, hogy J nilpotens, hiszen az 5.40. Állítás szerint J minden nilpotens ideált tartalmaz. Tekintsük J hatványainak

$$J \geq J^2 \geq \ldots \geq J^n \geq \ldots$$

leszálló ideálláncát. Az R jobb Artin, tehát található olyan n index, hogy $J^n = J^{n+k}$ minden $k \geq 0$ egészre. Meg kell mutatnunk, hogy $J^n = 0$.

Indirekt tegyük fel, hogy nem így van. Akkor viszont van olyan M jobbideál R-ben, amelyet nem annulál J^n és minimális erre a tulajdonságra nézve. Válasszunk egy m elemet M-ből, amelyre $mJ \neq 0$. Erre $mJ \leq mR \leq M$ és $(mJ)J^n = mJ^{n+1} = mJ^n \neq 0$. Az M minimalitása miatt $mJ = M$ és ennélfogva $mR = mJ$, ami ellentmond a Nakayama–lemmának (5.53.). □

5.70. Következmény. *Ha R egy jobb Artin–gyűrű, akkor $J(R)$ az egyetlen olyan jobbideál, amely nilpotens és amelyre $R_R/J(R)$ féligegyszerű modulus.*

Bizonyítás. Az állítás közvetlen következménye az 5.12., 5.67. és 5.69. Állításnak. □

5.71. Tétel (Wedderburn-Artin–tétel)**.** *Bármely R gyűrű esetén az alábbi állítások ekvivalensek.*

(*i*) *R féligegyszerű gyűrű;*

(*ii*) *R ferdetest feletti mátrix gyűrűk véges (gyűrű) direkt összege.*

(*iii*) *R jobb Artin–gyűrű és nem tartalmaz nem triviális jobb ideált.*

5.72. Állítás. *Legyen $A = K\Gamma/I$ egy gráfalgebra, az $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a Γ pontjaihoz tartozó ortogonális idempotensek teljes rendszere. Ekkor $J(A) = K\Gamma_+/I$, valamint*

$$A_A = e_1A \oplus \ldots \oplus e_nA,$$

ahol $P_i = e_iA$ felbonthatatlan projektív modulus.

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy $J(A) = K\Gamma_+/I$. Mivel az I ideál megengedett, ezért $(K\Gamma_+) \subseteq I$ valamely m egészre, tehát $K\Gamma_+/I$ nilpotens. Másrészt az $A/(K\Gamma_+/I)$ reguláris modulusa

$$A/(K\Gamma_+/I) \cong K\Gamma/K\Gamma_+ = \langle e_1\rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_n\rangle$$

1-dimenziós modulusok direkt összege, tehát $A/(K\Gamma_+/I)$ egy féligegyszerű gyűrű. Azt kaptuk, hog $K\Gamma_+/I$ valóban az A Jacobson–radikálja.

Akkor viszont rad $P_i = P_iJ(A) = e_iJ(A)$ és $e_iA/e_iJ(A) = \langle e_i\rangle$ egszerű modulus. Ha mégis $P_i = P \oplus P'$ egy direkt felbontás, akkor $P_i/\operatorname{rad} P_i = P/\operatorname{rad} P \oplus P'/\operatorname{rad} P'$. Mivel $P_i/\operatorname{rad} P_i$ egyszerű, ezért vagy $P = 0$ vagy $P' = 0$ a Nakayama–lemma szerint. □

5.73. Megjegyzés. Amit kaptunk tehát, hogy a gráfalgebrák esetén a Jacobson–radikált a Γ pozitív hosszúságú sétáinak megfelelő elemek generálják. Másrészt azt is beláttuk, hogy a felbonthatatlan projektív modulusok az ugyanazon pontból kiinduló sétáknak megfelelő elemek által generált jobbideálokkal egyeznek meg. Továbbá egy felbonthatatlan projektív radikálja szerint vett faktor mindig egy (1-dimenziós) egyszerű modulus.

5.74. Definíció. Azt mondjuk, hogy az M modulus lokális, ha pontosan egy maximális részmodulusa létezik. Másképpen mondva, ha $\mathrm{rad}\, M$ az egyetlen maximális részmodulus M-ben, azaz $M/\mathrm{rad}\, M$ egyszerű.

5.75. Állítás. *Ha R egy jobb Artin–gyűrű, akkor R_R felbomlik direkt felbonthatatlan jobbideálok véges direkt összegére.*

Bizonyítás. Ha R_R nem bomlik föl véges sok felbonthatatlan modulus direkt összegére, akkor létezik $M_n \leq R_R$ részmodulusok egy $n \in \mathbb{N}$-nel indxelt halmaza, amelyre $M_n \cap \sum_{k \neq n} M_k = 0$. Ekkor viszont a

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \gneq \sum_{n=2}^{\infty} M_n \gneq \dots$$

egy végtelen leszálló részmodulus lánc R_R-ben. □

5.76. Állítás. *Legyen R egy jobb Artin–gyűrű. Ha $P \in \mathrm{Mod}\text{-}R$ egy felbonthatatlan projektív modulus, akkor P lokális.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy P az R_R egy direkt felbonthatatlan komponense (3.6., 5.75.), azaz $P = eR$ valamely e idempotensre. Elég megmutatni, hogy, nem létezik olyan U és V valódi részmodulusa P-nek, amelyekre $U + V = P$ volna, hiszen ha M egy maximális és N egy tetszőleges részmodulus P-ben, akkor $M + N \neq P$-ből $N \leq M$ következik.

Indirekt tegyük föl, hogy mégis létezik U és V valódi részmodulus, amelyek generálják P-t. Akkor persze $e \in P$ előáll $e = u + v$ alakban alkalmas $u \in U$ és $v \in V$ elemekkel. Mivel R_R szabad, ezért létezik egyértelműen az $\alpha' : R_R \to U$, ill. $\beta' : R_R \to V$ homomorfizmus, amelyre $\alpha' : 1 \mapsto u$, ill. $\beta' : 1 \mapsto v$. Legyen α, ill. β az $\alpha' \mid_P$, ill. $\beta' \mid_P$ leszűkítés. Ekkor $\alpha, \beta \in \mathrm{End}_R(P)$ olyanok, hogy $\alpha + \beta = \mathrm{id}_P$, hiszen ha $p \in P = eR$, akkor $p = er_p$ alakú, amelyre $(er_p)(\alpha + \beta) = (e)(\alpha + \beta)r_p = (u + v)r_p = er_p$.

A Fitting–lemma miatt létezik olyan n, m, amelyekkel $\ker \alpha^n \oplus \mathrm{im}\, \alpha^n = P = \ker \beta^m \oplus \mathrm{im}\, \beta^m$. Vegyük észre, hogy $\mathrm{im}\, \alpha^n \leq \mathrm{im}\, \alpha \leq U \lneq P$ és használjuk, hogy P felbonthatatlan. Azt kapjuk, hogy $\mathrm{im}\, \alpha^n = 0$. Ugyanígy $\mathrm{im}\, \beta^n = 0$, tehát α és β nilpotens endomorfizmusai P-nek, amelyek összege az id_P. Viszont semelyik gyűrűben sem lehet két nilpotens elem összege az 1, hiszen, ha α nilpotens, akkor kvázi-reguláris, vagyis $\beta = 1 - \alpha$ invertálható, ám nilpotens elem sosem lehet invertálható. Ellentmondásra jutottunk, amiből következik, hogy P lokális. □

5.77. Lemma. *Legyen K, M és N tetszőleges modulus, $\varphi : K \to M$ és $\psi : M \to N$ homomorfizmusok. Ekkor,*

1., *ha $\varphi\psi$ epimorfizmus, akkor* $\mathrm{im}\, \varphi + \ker \psi = M$;

2., *ha $\varphi\psi$ monomorfizmus, akkor* $\mathrm{im}\, \varphi \cap \ker \psi = 0$.

Bizonyítás. A második állítás nyilvánvaló, ezért csak az elsőt bizonyítjuk. Válasszunk egy $m \in M$ elemet. A $\varphi\psi$ szürjektív, így található olyan $k \in K$, hogy $(k)\varphi\psi = (m)\psi$. Akkor $m - (k)\varphi \in \ker \psi$, amiből $m \in \mathrm{im}\, \varphi + \ker \psi$. □

5.78. Tétel. *Legyen R egy jobb Artin–gyűrű, és legyen $R_R = \oplus_{i=1}^{n} P_i$ az R_R felbonthatatlan projektívekre való felbontása. Ekkor az alábbi álítások teljesülnek.*

1., $P_i/\operatorname{rad} P_i = S_i$ *egyszerű modulus minden i-re;*

2., $R_R/J(R)_R = \oplus_{i=1}^n S_i$*;*

3., *ha S egy egyszerű R-modulus, akkor van olyan $1 \le i \le n$, hogy $S \cong S_i$*

4., $S_i \cong S_j$ *pontosan akkor, ha $P_i \cong P_j$.*

Bizonyítás. Az 1., állítás éppen az 5.76. Állítás. A második állítás

$$\begin{aligned} R_R/J(R) = R_R/\operatorname{rad} R_R = (\oplus_{i=1}^n P_i)/\operatorname{rad}(\oplus_{i=1}^n P_i) = \\ = \oplus_{i=1}^n P_i/\oplus_{i=1}^n \operatorname{rad} P_i = \oplus_{i=1}^n (P_i/\operatorname{rad} P_i) = \oplus_{i=1}^n S_i \end{aligned}$$

alapján igaz.

A 3., állításhoz rögzítsünk egy S egyszerű modulust. Az 5.3. Állítás alapján létezik $\varphi : R_R \twoheadrightarrow S$ epimorfizmus, amelynek $M = \ker\varphi$ magja egy maximális részmodulus R_R-ben, így $J(R) \le M$. A $\varphi : R_R \twoheadrightarrow S$ ezért faktorizálódik a $\mu : R_R \to R_R/J(R)$ természetes homomorfizmuson keresztül, azaz van olyan $\bar{\varphi} : R/J(R) \to R/M$ homomorfizmus, amellyel $\mu\bar{\varphi} = \varphi$. Emiatt S kompozíciófaktora az $R/J(R)$ egy kompozíciólláncának, amely lánc az 1., pont alapján csak S_i típusú egyszerűeket tartalmaz.

A 4., állítás egyik iránya triviális. A másik irányhoz tegyük fel, hogy $S_i \cong S_j \cong S$. Jelöljön α egy $P_j \twoheadrightarrow S$, míg β egy $P_i \twoheadrightarrow S$ epimorfizmust. Akkor a P_i projektív tulajdonságát használva

$$\begin{tikzcd} & P_i \arrow[dl, dashed, "\exists\varphi"'] \arrow[d, "\beta"] \\ P_j \arrow[r, two heads, "\alpha"] & S \end{tikzcd}$$

adódik egy $\varphi : P_i \to P_j$ homomorfizmus, amellyel $\varphi\alpha = \beta$. Az előző 5.77. Lemma szerint

$$P_j = \operatorname{im}\varphi + \ker\alpha = \operatorname{im}\varphi + \underbrace{\operatorname{rad} P_j}_{\operatorname{rad} P_j \ll P_j} \Rightarrow \operatorname{im}\varphi = P_j.$$

A P_j projektív, emiatt φ felhasadó és P_i felbonthatatlan, ami miatt $\ker\varphi = 0$. Kaptuk, hogy $P_i \cong P_j$. □

5.79. Példa.

6. Moduluskategóriák

Ebben a fejezetben a gyűrűk modulusait kategóriaelméleti szempontból vizsgáljuk. Célunk a véges-dimezniós algebrák moduluskategóriájának leírása, illetve ennek segítségével az első Brauer-Thrall–sejtés bizonyítása. Mindenekelőtt elengedhetetlen, hogy áttekintsük az alapvető kategóriaelméleti fogalmakat.

6.1. Alapfogalmak

6.1. Definíció. Egy $\mathcal{C}$ kategória áll a $\mathcal{C}$ objektumaiból és morfizmusaiból, melyekre az alábbi axiómák teljesülnek.

- Ha X, Y objektumai $\mathcal{C}$-nek, akkor az X és Y közötti morfizmusok $\mathrm{Hom}(X, X)$ halmazt alkotnak.[1]
- Ha X, Y és Z objektumai $\mathcal{C}$-nek, $\alpha \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ és $\beta \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$ (azaz α és β komponálható), akkor létezik egyértelműen egy $\alpha\beta \in \mathrm{Hom}(X, Z)$ morfizmus, a melyet α és β kompozíciójának nevezünk.
- Bármely Y objektumhoz létezik egy kitüntetett $1_Y \in \mathrm{Hom}(Y, Y)$ morfizmus, amelyre ha $\alpha \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ és $\beta \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$, akkor $\alpha 1_Y = \alpha$ és $1_Y\beta = \beta$. Ezt a morfizmust az Y identitás morfizmusának nevezzük.
- Ha α, β és γ komponálható morfizmusok $\mathcal{C}$-ben, akkor $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, vagyis a kompozíció (ha értelmes, akkor) asszociatív.

6.2. Megjegyzés. Felhívjuk a figyelmet, hogy egy kategória objektumai nem feltétlenül rendelkeznek algebrai struktúrával, sőt nem is feltétlenül halmazok. Egy kategóriát elképzelhetünk úgy, mint egy irányított gráfot, melynek pontjai az objektumok és minden $X \to Y$ nyíl a $\mathrm{Hom}(X, Y)$ egy elemét reprezentálja. Megjegyezzük, hogy bár egy gráf pontjainak összességét halmaznak szokás definiálni, most egy kategória objektumaira nincs ilyen megkötés. Általában egy kategória objektumai valódi osztályt alkotnak.

6.3. Példák.

- $\mathcal{C}$ objektumai és nyilai a

$$\begin{tikzcd} \underset{X}{\bullet} \arrow[loop left, "1_X"] \arrow[r, "\alpha"] & \underset{Y}{\bullet} \arrow[loop right, "1_Y"] \end{tikzcd}$$

  gráffal adottak. ($\alpha 1_Y = \alpha, 1_X 1_X \alpha = \alpha$, stb...)

- Egy parciálisan rendezett S halmaz elemei is kategóriát alkotnak, ahol az objektumok S elemei és, ha $X, Y \in S$, akkor $\mathrm{Hom}(X, Y)$ pontosan akkor egyelemű, ha $X \leq Y$, különben üres.
- set a halmazok katgóriája, melynek objektumai a halmazok, a morfizmusok a halmazfüggvények;
- Ab az Abel–csoportok kategóriáját jelöli, ahol a morfizmusok az Abel–csoporthomomorfizmusok, általánosabban Mod-R kategória az modulushomomorfizmusokkal.
- A csoportok, vektorterek, testek, stb... a homomorfizmusaikra nézve mind kategóriát alkotnak.

6.4. Definíció. A $\mathcal{C}$ kategória egy $\alpha \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ morfizmusa

- monomorfizmus, ha bármely β, γ esetén $\beta\alpha = \gamma\alpha$-ból $\beta = \gamma$ következik;

[1]kategória alatt a jegyzetben mindenhol lokálisan kis kategóriát értünk.

- epimorfizmus, ha bármely β, γ esetén $\alpha\beta = \alpha\gamma$-ból $\beta = \gamma$ következik;
- izmorfizmus, ha létezik olyan $\beta \in \mathrm{Hom}(Y, X)$, amellyel $\alpha\beta = 1_X$ és $\beta\alpha = 1_Y$.

6.5. Megjegyzés. Bármely R gyűrű esetén Mod-R -ben a monomorfizmusok éppen az injektív-, az epimorfizmusok éppen a szürjektív- és az izomorfizmusok éppen a bijektív homomorfizmusok (ld. 1.14., 1.15. és 1.16.).

Minden kategóriában igaz, hogy az izomorfizmusok egyszerre monomorfizmusok és epimorfizmusok, azonban a megfordítás általában nem igaz.

6.6. Definíció. Legyenek $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ kategóriák.

- Az $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ egy kovariáns funktor, ha F a $\mathcal{C}$ minden X objektumához a $\mathcal{D}$-nek egy egyértelműen meghatározott $F(X)$ objektumát rendeli, tartja a morfizmusokat, a kompozíciót és az identitást. Tehát ha $\alpha : X \to Y$ egy morfizmus $\mathcal{C}$-ben, akkor $F(\alpha) : F(X) \to F(Y)$ a neki megfelelő nyíl $\mathcal{D}$-ben, továbbá, ha α, β komponálható morfizmusok $\mathcal{C}$-ben, akkor $F(\alpha\beta) = F(\alpha)F(\beta)$ és a $\mathcal{C}$ bármely X objektumára $F(1_X) = 1_{F(X)}$.
- A $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ egy kovariáns funktor, ha F a $\mathcal{C}$ minden X objektumához a $\mathcal{D}$-nek egy egyértelműen meghatározott $G(X)$ objektumát rendeli, „megfordítja" a morfizmusokat, tartja kompozíciót és az identitást. Tehát ha $\alpha : X \to Y$ egy morfizmus $\mathcal{C}$-ben, akkor $G(\alpha) : G(Y) \to G(X)$ a neki megfelelő nyíl $\mathcal{D}$-ben, továbbá, ha α, β komponálható morfizmusok $\mathcal{C}$-ben, akkor $G(\alpha\beta) = G(\beta)G(\alpha)$ és a $\mathcal{C}$ bármely X objektumára $G(1_X) = 1_{G(X)}$.

6.7. Példák. Hom-funktorok. Az alábbi két példában legyen R egy gyűrű és M egy rögzített R-modulus.

- A kovariáns Hom-funktor. A $\mathrm{Hom}_R(M, -) : \text{Mod-}R \to \mathrm{Ab}$ egy kovariáns funktor, amely egy tetszőleges $X \in \text{Mod-}R$ modulushoz a $\mathrm{Hom}_R(M, X)$ halmazt rendeli. Ha $\alpha : X \to Y$ egy hommorfizmus, akkor $\mathrm{Hom}_R(M, \alpha) = \alpha_* : \mathrm{Hom}_R(M, X) \to \mathrm{Hom}_R(M, Y)$ az az Abel–csoport-homomorfizmus, amely egy $\varphi : M \to X$ homomorfizmushoz az $(\varphi)\alpha_* = \varphi\alpha$ homomorfizmust rendeli.
- A kontravariáns Hom-funktor. A $\mathrm{Hom}_R(-, M) : \text{Mod-}R \to \mathrm{Ab}$ egy kovariáns funktor, amely egy tetszőleges $X \in \text{Mod-}R$ modulushoz a $\mathrm{Hom}_R(X, Y)$ halmazt rendeli. Ha $\alpha : X \to Y$ egy hommorfizmus, akkor $\mathrm{Hom}_R(\alpha, M) = \alpha^* : \mathrm{Hom}_R(Y, M) \to \mathrm{Hom}_R(X, M)$ az az Abel–csoport-homomorfizmus, amely egy $\varphi : Y \to M$ homomorfizmushoz az $(\varphi)\alpha^* = \alpha\varphi$ homomorfizmust rendeli.
- A standard K-dualitás: legyen A egy véges dimenziós K-algebra. Ahogy azt megjegyeztük, ekkor minden M modulus egyben K-vektortér, sőt $K - A$ bimodulus. A végesen generált jobb-, illetve balmodulusok között egy kontravariáns funktort ad a standard K-dualitás:

$$\begin{aligned} D : \text{mod-}A &\longrightarrow A\text{-mod} \\ M &\longmapsto \mathrm{Hom}_K({}_K M_A, {}_K K) \end{aligned}$$

és a párja

$$\begin{aligned} D' : A\text{-mod} &\longrightarrow \text{mod-}A \\ M &\longmapsto \mathrm{Hom}_K({}_A M_K, K_K). \end{aligned}$$

Akárcsak vektorterek esetében most is $D'D(X) \cong X$ minden végesen generált X modulusra. (A későbbiekben a D' funktort is D-vel jelöljük, ami nem fog félreértéshez vezetni.

6.8. Megjegyzés. Ha X, Y két R-modulus, akkor $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ nem csak egy halmaz, de Abel–csoport is egyben az $(x)(\varphi+\psi) = (x)\varphi+(x)\psi$, illetve $(x)(-\varphi) = -(x)\varphi$ módon értelmezett műveletekre nézve. Vannak funktorok, amelyek követik ezt az Abel–csoport struktúrát a Hom-halmazokon, és vannak, amelyek nem. Ha F egy olyan kovariáns (vagy kontravariáns) funktor két modulus kategória között, amelyre a $\mathrm{Hom}(X,Y) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}(F(X),F(Y))$ (vagy $\mathrm{Hom}(X,Y) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}(F(Y),F(X))$) egy Abel–csoport-homomorfizmus, akkor azt mondjuk, hogy az F egy *additív* funktor.

Tekintsünk egy $\alpha : U \to X$ és egy $\beta : Y \to Z$ homomorfizmust. Könnyű ellenőrizni, hogy mind az $\alpha^* : \mathrm{Hom}_R(X,Y) \to \mathrm{Hom}_R(U,Y)$, mind a $\beta_* : \mathrm{Hom}_R(X,Y) \to \mathrm{Hom}_R(X,Z)$ leképezés Abel–csoport-homomorfizmus. Emiatt a

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(X,Y) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(U,-)} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(U,X),\mathrm{Hom}_R(U,Y)) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha_* \end{array}$$

leképezés szintén egy Abel–csoport-homomorfizmus. Ugyanis $(\varphi)(\alpha+\beta)_* = (\varphi)(\alpha+\beta) = \varphi\alpha+\varphi\beta = (\varphi)\alpha_* + (\varphi)\beta_* = (\varphi)(\alpha_*+\beta_*)$, és hasonlóan $(\varphi)(-\alpha)_* = (\varphi)(-\alpha_*)$ minden $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(U,X)$ esetén. Ugyanígy megmutatható, hogy a kontravariáns Hom-funktor is egy additív funktor Mod-R -ből $\mathbb{Z}$-Mod -ba.

Ha $R = A$ egy véges dimenziós alegbra, akkor a D : Mod-A $\to$ A-Mod standard K dualitás mint Hom funktor maga is additív. Sőt, a

$$\mathrm{Hom}_A(X,Y) \xrightarrow{D} \mathrm{Hom}_K(D(Y),D(X))$$

egy vektortér izomorfizmus. A K skalárjaira vonatkozó homogenitás könnyen ellenőrízhető. Mivel mindkét Hom-tér véges dimenziós, ezért elég észrevenni, hogy a kapott lineáris leképezés injektív. Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(X,Y)$ és tegyük fel, hogy $D(\varphi) = \varphi_*$ a 0 leképezés. Azaz tetszőleges $f : Y \to K$ lineáris leképezés esetén $(f)\varphi_* = 0$. Ha φ nem a 0, akkor van olyan nem 0 eleme X-nek, amelyre $(x)\varphi \neq 0$, és található olyan $g \in \mathrm{Hom}_K(Y,K)$, amelyre $((x)\varphi)g \neq 0$, ami ellentmondás. Vagyis látjuk, hogy $\varphi = 0$.

6.9. Definíció. A Mod-R -beli homomorfizmusok

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z$$

sorozatára azt mondjuk, hogy egzakt Y-nál, ha $\mathrm{im}\,\alpha = \ker\beta$. Az

$$\ldots \xrightarrow{\alpha_{n+2}} X_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} X_n \xrightarrow{\alpha_n} X_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \ldots$$

sorozat egzakt sorozat, ha a sorozat minden X_i-nél egzakt. A

$$0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$$

alakú egzakt sorozatot rövid egzakt sorozatnak hívjuk.

6.10. Megjegyzés. A $0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ sorozat pontosan akkor rövid egzakt, ha α monomorfizmus, β epimorfizmus és $\mathrm{im}\,\beta = Z \cong Y/\,\mathrm{im}\,\alpha \cong Y/X$.

6.11. Definíció. A $0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ rövid egzakt sorozatra azt mondjuk, hogy felhasadó, ha α felhasadó mono.

6.12. Lemma. *A* $0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ *rövid egzakt sorozatra az alábbi állítások ekvivalensek:*

(*i*) *a sorozat felhasadó;*

(*ii*) *a* β *egy felhasadó epimorfizmus;*

(*iii*) *léteznek* $\alpha' : Y \to X$ *és* $\beta' : Z \to Y$ *homomorfizmusok, amelyekre* $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$, $\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$, $\beta'\alpha' = 0$ *és* $\alpha'\alpha + \beta\beta' = \mathrm{id}_Y$ *teljesül.*

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: a 2.11. Állítás szerint az X izomorf az Y egy direkt összeadandójával, emiatt $Y \cong \mathrm{im}\,\alpha \oplus Z$. Viszont $\ker\beta = \mathrm{im}\,\alpha$ az egzaktság miatt, amiből szintén 2.11. Állítás szerint következik, hogy β felhasadó mono.

A $(ii) \Rightarrow (i)$ irány hasonlóan bizonyítható, míg a $(iii) \Rightarrow (i)$ és $(iii) \Rightarrow (ii)$ triviálisan igaz. Elég belátni tehát, hogy $(i) \wedge (ii) \Rightarrow (iii)$. Feltehetjük, hogy $Y = X \oplus Z$ és hogy $\alpha : X \to Y$ a természetes beágyazás, míg $\beta : Y \to Z$ a természetes vetítés. Ekkor az α és β felhasadó volta miatt létezik olyan $\alpha' : Y \to X$ és $\beta' : Z \to Y$, amelyekkel $\alpha\alpha' = \mathrm{id}\,X$ és $\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$. Azt is látjuk, hogy $\beta'\alpha' = 0$. Már csak az maradt hátra, hogy belássuk az $\alpha'\alpha + \beta\beta' = \mathrm{id}_Y$ egyenlőséget. Ehhez legyen $(x, z) \in Y$. Erre $(x, y)(\alpha'\alpha + \beta\beta') = (x, 0) + (0, z) = (x, z) = (x, z)\,\mathrm{id}_Y$. □

6.13. Következmény. *Modulusok* $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ *rövid egzakt sorozatára az alábbiak teljesülnek.*

- *Az* X *pontosan akkor injektív, ha a sorozat felhasad.*
- *A* Z *pontosan akkor projektív, ha a sorozat felhasad.*

Bizonyítás. A két állítás közvetlen következménye az előző 6.12., ill. a 3.5. és 3.9. Állításoknak. □

6.14. Állítás. *A* $D : \text{mod-}A \to A\text{-mod}$ *dualitás funktor minden rövid egzakt sorozatot rövid egzakt sorozatba visz. Továbbá, a* $0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ *pontosan akkor felhasadó, ha a* $0 \to D(Z) \xrightarrow{D(\beta)} D(Y) \xrightarrow{D(\alpha)} D(X) \to 0$ *felhasadó.*

Bizonyítás. Tekintsük a A-mod -beli $0 \to D(Z) \xrightarrow{D(\beta)} D(Y) \xrightarrow{D(\alpha)} D(X) \to 0$ sorozatot. Vegyük észre, hogy mivel α injektív, ezért $D(\alpha)$ szürjektív és hasonlóan mivel β szürjektív, ezért $D(\beta)$ injektív. Továbbá $\alpha\beta = 0$ miatt $0 = D(\alpha\beta) = D(\beta)D(\alpha)$, másképp $\mathrm{im}\,D(\beta) \leq \ker D(\alpha)$. A fordított tartalmazáshoz elég megmutatni, hogy $\dim_{\mathrm{K}} \ker D(\alpha) = \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{im}\,D(\beta)$, hiszen $D(Z), D(Y)$ és $D(X)$ is mint vektorterek véges dimenziósak. Azt tudjuk, hogy $\dim_{\mathrm{K}} M = \dim_{\mathrm{K}} D(M)$ minden végesen generált M modulusra. Ezt és az egzaktságot használva

$$\dim_{\mathrm{K}} D(Y) = \dim_{\mathrm{K}} D(Z) + \dim_{\mathrm{K}} D(X) = \\ = \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{im}\,D(\beta) + (\dim_{\mathrm{K}} D(Y) - \dim_{\mathrm{K}} \ker D(\alpha)),$$

amiből $\dim_{\mathrm{K}} \ker D(\alpha) = \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{im}\,D(\beta)$ adódik.

Az állítás második részéhez először tegyük fel, hogy a sorozat felhasadó, azaz α egy felhasadó monomorfizmus. Akkor létezik egy $\alpha' : Y \to X$, amivel $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$. Mivel D egy funktor, ezért $D(\alpha\alpha') = D(\alpha')D(\alpha) = \mathrm{id}_{DX}$, amiből azt kapjuk, hogy $D(\alpha)$ egy felhasadó epi. A 6.12. Lemma miatt az új sorozat is felhasadó. A megfordításhoz tegyük fel, hogy

$$0 \to D(Z) \xrightarrow{D(\beta)} D(Y) \xrightarrow{D(\alpha)} D(X) \to 0$$

felhasadó. Mivel $D(\beta)$ felhasadó monomorfizmus, létezik egy $\gamma : D(Y) \to D(Z)$ homomorfizmus, amelyre $D(\beta)\gamma = \mathrm{id}_{D(Z)}$. Ekkor található egy $\gamma' \in \mathrm{Hom}_A(Y, Z)$ homomorfizmus, amelyre $D(\gamma') = \gamma$, és amellyel $\beta\gamma' = \mathrm{id}_Z$, mert $D(\beta\gamma') = \mathrm{id}_{D(Z)}$ (ld. 6.8.). $\square$

6.15. Következmény. *Legyen A egy véges dimenziós algebra és M egy A-modulus. Ekkor az alábbi két állítás igaz.*

- *M pontosan akkor projektív, ha $D(M)$ injektív;*
- *M pontosan akkor felbonthatatlan projektív, ha $D(M)$ felbonthatatlan injektív.*

Bizonyítás. Használjuk, a 6.13. és 6.14. Állításokat, illetve azt, hogy $D^2(M) \cong M$. $\square$

6.16. Példa. Gráfalgebrák felbonthatatlan injektív modulusai.

Legyen $A = K\Gamma/I$, ahol Γ az alábbi gráf

$$\begin{tikzcd} 1 \bullet \arrow[r, shift left, "\alpha"] & \bullet\, 2 \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[loop right, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

és I az $\{\alpha\beta, \gamma^2, \beta\alpha, \gamma\beta\}$ elemek által generált megengedett ideál. Ekkor az A algebra (jobb) reguláris modulusának Loewy–diagramja

$$A_A = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \end{matrix}$$

Az injektív modulusok mod-A-ban megkaphatók a A-mod projektív modulusainak K-duálisaiként. Ezért először megkeressük a A-mod (felbonthatatlan) projektív modulusait, ehhez pedig felírjuk az ${}_AA$ Loewy–diagramját. Az ${}_AA$ felbomlik az ${}_AA = Ae_1 \oplus Ae_2$ felbonthatatlan projektív modulusok direkt összegére, ahol $Ae_1 = \langle e_1, \beta \rangle$ és $Ae_2 = \langle e_2, \alpha, \gamma, \alpha\gamma \rangle$. Tehát A bal reguláris modulusának Loewy–diagramja

$$\begin{tikzcd} & & & e_2 \arrow[dl, "\alpha\cdot"'] \arrow[dr, "\gamma\cdot"] & \\ {}_AA = & e_1 \arrow[d, "\beta\cdot"'] & \oplus\ \alpha & & \gamma \arrow[d, "\alpha\cdot"] \\ & \beta & & & \alpha\gamma \end{tikzcd}$$

vagy a tömörebb jelöléssel

$${}_AA = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} & 2 & \\ 1 & & 2 \\ & & 1 \end{matrix}$$

Általában is igaz az, hogy ha A egy gráfalgebra, akkor az ${}_AA$ bal modulus Loewy–diagramját megkaphatjuk úgy is mint az $A^\circ_{A^\circ}$ jobb modulus Loewy–diagramja, ahol

A° az A algebra oppozit algebrája. Az A° oppozit algebra vektortér struktúrája megegyezik az A algebráéval, azonban két $a, b \in A^\circ$ elem $a * b$ szorzata az A-beli ba szorzattal egyezik meg. Ha $A = K\Gamma/I$ egy gráfalgebra, akkor A° is egy $K\Gamma'/I'$ gráfalgebra. A Γ' gráf az, amelyet Γ-ból a nyilak megfordításával kapunk, míg I' egy generátorrendszeréhez jutunk, ha I egy generátorrendszerében az elemek monomjaiban a szorzótényezők sorrendjét felcseréljük. Az iménti példában $A^\circ = K\Gamma'/I'$, a Γ' gráf az

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, shift right, "\beta'"'] & \underset{2}{\bullet} \arrow[l, shift right, "\alpha'"'] \arrow[loop right, "\gamma'"] \end{tikzcd}$$

és $I' = \langle \beta'\alpha', \alpha'\beta', \gamma'^2, \beta'\gamma' \rangle$.

Vegyük az Ae_1 bal modulust (vagy másképp az e_1A° jobb modulust) és rögzítsük a diagramhoz tartozó bázisát!

$$Ae_1 = \begin{tikzcd} b_1 \arrow[d, "\beta\cdot"'] \\ b_2 \end{tikzcd}$$

Az ehhez tartozó duális bázis megadja $D(Ae_1) = \mathrm{Hom}_K(Ae_1, K)$ egy bázisát. A duális bázis két eleme $\{b'_1, b'_2\}$, ahol $(b_j)b'_i = \delta_{i,j}$. Ekkor $b'_2\alpha$ az a $\mathrm{Hom}_K(Ae_1, K)$-beli elem, amely egy $x \in Ae_1$ elemhez $(x)(b'_2\alpha) = (\alpha x)b'_2$ elemet rendeli (ld. 1.22.). Így $(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)(b'_2\alpha) = (\lambda_1 \alpha b_1 + 0)b'_2 = \lambda_1(b_2)b'_2 = \lambda_1$. Vagyis $b'_2\alpha = b'_1$. Emiatt

$$D(Ae_1) = \begin{tikzcd} b'_2 \arrow[d, "\beta"] \\ b'_1 \end{tikzcd} = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$$

Hasonló gondolatmenettel kaphatjuk meg Ae_2 duálisát is, és ezzel az A felbonthatatlan injektív (jobb) modulusait.

$$D({}_AA) = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & & 1 \\ 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$$

6.2. A véges dimenziós algebrák moduluskategóriája

Ebben a részben a célunk az lesz, hogy egy véges dimenziós A algebra végesen generált modulusait és az azok közötti morfizmusokat leírjuk. Természetesen ezt a lehető legkevesebb fölösleges információval próbáljuk megadni. Így például nem szükséges minden modulust leírni, elég csak a modulusok izomorfiaosztályait leírni. Ezen felül elég a direkt felbonthatatlan (ind-A) modulusok izomorfiaosztályait tekinteni, ugyanis ha $M, N \in$ mod-A, akkor M és N is felbomlik véges sok direkt felbonthatatlan modulus direkt összegére, azaz például $M = \oplus_i M_i$ és $N = \oplus_j N_j$. Ha pedig $\alpha : M \to N$ egy homomorfizmus, akkor α-t felbonthatjuk az $\iota_i : M_i \to M, \pi_i : M \to M_i$ és $i_j : N_j \to N, p_j : N \to N_j$ természetes beágyazások és vetítések segítségével a következő módon. Legyen $\alpha_{i,j} = \iota_i \alpha p_j : M_i \to N_j$, akkor $\alpha = \sum \pi_i \alpha_{i,j} i_j$.

Nem csak a modulusokat, morfizmusaikat is redukáljuk. Ha egy $\alpha : X \to Y$ felbomlik mint $\alpha = \sum \beta_i \gamma_i$ valamely $\beta_i : X \to Z$ és $\gamma_i : Z \to Y$ homomorfizmusok szorzatainak összegére, akkor elég leírni a β_i és γ_i homomorfizmusokat. Tehát érdemes a *felbonthatatlan* morfizmusokat kigyűjteni egy fix X, Y modulus esetén. Azonban tetszőleges $\alpha : X \to Y$ homomorfizmus felbontható homomorfizmusok szorzatára. Legyen ugyanis $\sigma \in \mathrm{End}_A(X), \tau \in \mathrm{End}_A(Y)$ invertálható endomorfizmusok, illetve legyen U tetszőleges A-modulus. Ekkor

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & Y \\ & X \arrow[ur, "\sigma^{-1}\alpha"'] & \end{tikzcd} \quad \text{vagy} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha\tau"'] & & Y \\ & Y \arrow[ur, "\tau^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\iota_1"'] & & Y \\ & X \oplus U \arrow[ur, "\pi_1\alpha"'] & \end{tikzcd} \quad \text{vagy} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & Y \\ & Y \oplus U \arrow[ur, "\alpha\iota_1"'] & \end{tikzcd}$$

mind az α lehetséges felbontásai. Vegyük észre, hogy az első és harmadik felbontásnál az első morfizmus felhasadó monomonorfizmus, míg a második és a negyedik esetben a második morfizmus felhasadó epimorfizmus.

6.17. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\alpha : X \to Y$ egy irreducibilis morfizmus, ha α nem felhasadó (monomorfizmus vagy epimorfizmus) és ha az α felbomlik az alábbi módon

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

akkor β felhasadó monomorfizmus, vagy γ felhasadó epimorfizmus.

6.18. Megjegyzés. Általában nem igaz, hogy minden morfizmus felbomlik irreducibilis morfizmusok kompozíciójának lineáris kombinációjára. Azonban, ha véges sok (egymással páronként nem izomorf) felbonthatatlan modulus létezi, akkor igaz.

6.19. Állítás. *Ha az $\alpha : X \to Y$ irreducibilis, akkor α vagy monomorfizmus vagy epimorfizmus.*

Bizonyítás. Tetszőleges $\alpha : X \to Y$ felbontható $\alpha' : X \to \mathrm{im}\ \alpha$ és $\varepsilon : \mathrm{im}\ \alpha \to Y$ természetes homomorfizmus és beágyazás

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & & Y \\ & \mathrm{im}\ \alpha \arrow[ur, "\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

szorzatára. Tegyük fel, hogy α nem mono, azaz $\ker \alpha \neq 0$. Akkor $\ker \alpha' = \ker \alpha \neq 0$, ami miatt α' nem felhasadó monomorfizmus és ezért ε felhasadó epimorfizmus, speciálisan $\mathrm{im}\ \varepsilon = Y$. Ám $(\mathrm{im}\ \alpha)\varepsilon = \mathrm{im}\ \alpha = Y$, ami szerint α epimorfizmus. $\square$

6.20. Példa. Tekintsük azt az $A = K\Gamma/I$ algebrát, amelynek gráfja

$$1 \ \bullet \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \bullet \ 2$$

és az I ideál egy generátora $\{\alpha\beta\alpha, \beta\alpha\beta\}$. Vagyis az A_A Loewy–diagramja

$$A_A = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \oplus \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

Ekkor egy $\varphi : \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \to \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 2 \end{array}$ nem 0 morfizmus nem lehet irreducibilis, mert se nem mono-, se nem epimorfizmus. Ahogy azt majd később látni fogjuk a φ felbomlik az

$$\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \rightarrowtail \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \twoheadrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \rightarrowtail \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

irreducibilis morfizmusok szorzatára.

6.21. Megjegyzés. Az 5.76. Állításban láttuk, hogy egy véges dimenziós A algebra felbonthatatlan P projektív modulusa lokális, vagyis egyetlen maximális részmodulusa $\operatorname{rad} P$ és $P/\operatorname{rad} P$ egyszerű. Ha alkalmazzuk P-re a standard K dualitás funktort, akkor egy $Q = D(P)$ felbonthatatlan injektív bal A-modulushoz jutunk. Könnyű ellenőrizni, hogy a D funktor a $P \to P/\operatorname{rad} P$ természetes homomorfizmusnak a $\operatorname{soc} Q \to Q$ természetes beágyazást felelteti meg. Emiatt egy felbonthatatlan Q injektív A modulus talpa egyszerű.

6.22. Állítás. *Legyen P egy felbonthatatlan projektív, Q pedig egy felbonthatatlan injektív A-modulus. Ekkor a* $\operatorname{rad} P$ *egy felbonthatatlan direkt összeadandójának (természetes) beágyazása P-be, a Q egy $Q/\operatorname{soc} Q$ egy felbonthatatlan direkt összeadandójára való vetítése irreducibilis morfizmus. Továbbá nincs más típusú P-be érkező, illetve Q-ból induló irreducibilis morfizmus.*

Bizonyítás. Csak a projektív modulusokra vonatkozó állítást látjuk be, a másik állítás hasonlóan igazolható. Legyen $\alpha : U \rightarrowtail P$, ahol $\operatorname{im} \alpha \overset{\oplus}{\leq} \operatorname{rad} P$. Megmutatjuk, hogy α valóban irreducibilis. Tegyük fel, hogy az alábbi diagram kommutatív.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & P \\ & X \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

Feltehetjük, hogy γ nem epimorfizmus, különben γ felhasadó epimorfizmus (ld. 3.5.). Ha γ nem epimorfizmus, akkor $\operatorname{im} \gamma \leq \operatorname{rad} P$, mert P lokális (ld. 5.76.). Viszont $\operatorname{im} \alpha \leq \operatorname{im} \gamma$, tehát adódik egy újabb kommutatív diagram

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, shift right, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"'] & & \operatorname{rad} P \arrow[ll, dashed, shift right, "\pi"'] \\ & X \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

ahol α felhasadó monomorfizmus, emiatt létezik egy $\pi : \operatorname{rad} P \to U$, amellyel $\alpha\pi = \mathrm{id}_U$. Ekkor viszont $\mathrm{id}_U = \alpha\pi = \beta\gamma\pi = \beta(\gamma\pi)$, tehát β is felhasadó monomorfizmus.

A megfordításhoz tegyük fel, hogy $\alpha : U \to P$ egy irreducibilis morfizmus. Az α nem lehet epimorfizmus, mert akkor felhasadó, és ezért nem irreducibilis. A 6.19. Állítás miatt α mono és az 5.76. Állítás miatt $\operatorname{im} \alpha \leq \operatorname{rad} P$. Vehetjük akkor az α egy alábbi felbontását.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & P \\ & \mathrm{rad}\ P \arrow[ur, "\alpha'"'] & \end{tikzcd}$$

A feltételek szerint α irreducibilis, és persze ε nem epimorfizmus, ami miatt α' felhasadó monomorfizmus. $\square$

6.23. Példa. Vegyük a 6.20. Példában szereplő A algebrát és a példában szereplő φ homomorfizmust. Könnyű ellenőrizni, hogy a mod-A projektív modulusai injektívek is, hiszen most

$$D(A_A) = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \cong A_A.$$

A 6.19. Állítást alkalmazva, azt kapjuk, hogy a φ

$$\begin{smallmatrix} \boxed{2} \\ 1 \end{smallmatrix} \rightarrowtail \begin{smallmatrix} 1 \\ \boxed{2} \\ 1 \end{smallmatrix} \twoheadrightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \boxed{2} \end{smallmatrix} \rightarrowtail \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ \boxed{2} \end{smallmatrix}$$

felbontása valóban irreducibilis morfizmusok kompozíciójára való bontás.

6.24. Definíció (Auslander-Reiten–sorozat)**.** Azt mondjuk, hogy a mod-A-beli $0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ rövid egzakt sorozat majdnem felhasadó (vagy másképp Auslander-Reiten–sorozat), ha az alábbi feltételek teljesülnek.

a., $X, Z \in$ ind-A (azaz X és Z is felbonthatatlan),

b., a sorozat nem felhasadó,

c., tetszőleges $Z' \in$ mod-A és $\gamma : Z' \to Z$ nem felhasadó epimorfizmus esetén létezik olyan $\delta : Z' \to Y$, amelyel $\delta\beta = \gamma$,

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl, dashed, "\exists\delta"'] \arrow[d, "\gamma"] & \\ Y \arrow[r, "\beta"'] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

d., tetszőleges $X' \in$ mod-A és $\gamma : X \to X'$ nem felhasadó monomorfizmus esetén létezik olyan $\delta : Y \to X'$, amellyel $\alpha\delta = \gamma$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & Y \arrow[dl, dashed, "\exists\delta"] \\ & X' & \end{tikzcd}$$

6.25. Definíció. Egy tetszőleges $\alpha : X \to Y$ homomorfizmusra azt mondjuk, hogy balminimális, ha bármely $\varepsilon : Y \to Y$ esetén $\alpha\varepsilon = \alpha$-ból következik, hogy ε egy izomorfizmus. Az α jobbminimális, ha bármely $\varepsilon : X \to X$ esetén $\varepsilon\alpha = \alpha$-ból következik, hogy ε egy izomorfizmus.

6.26. Lemma. *Ha a* $0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ *egy majdnem felhasadó sorozat, akkor* α *bal- és* β *jobbminimális.*

Bizonyítás. Csak a második állítást látjuk be, az első hasonlóan igazolható. Legyen $\varepsilon \in \mathrm{End}_A(Y)$ olyan, hogy $\varepsilon\beta = \varepsilon$. A Fitting–lemma miatt létezik olyan n, amelyre $Y = \ker \varepsilon^n \oplus \mathrm{im}\ \varepsilon^n$. Viszont a feltételek szerint $\beta = \varepsilon\beta = \ldots = \varepsilon^n\beta$, tehát $\ker \varepsilon^n \leq \ker \beta = \mathrm{im}\ \alpha \cong X$. Ekkor alkalmazhatjuk a moduláris azonosságot

$$\mathrm{im}\ \alpha = \mathrm{im}\ \alpha \cap (\ker \varepsilon^n \oplus \mathrm{im}\ \varepsilon^n) = \ker \varepsilon^n \oplus (\mathrm{im}\ \varepsilon^n \cap \mathrm{im}\ \alpha) \cong X.$$

Mivel az X direkt felbonthatatlan, vagy $\ker \varepsilon^n$ vagy $\mathrm{im}\ \varepsilon^n \cap \mathrm{im}\ \alpha$ szükségképpen 0. A második eset nem állhat fenn, mert akkor $\mathrm{im}\ \alpha = \ker \varepsilon^n \overset{\oplus}{\leq} Y$ miatt α felhasadó volna. Tehát $\ker \varepsilon^n = 0$, amiből $\ker \varepsilon = 0$ vagyis ε injektív. De $\dim_{\mathrm{K}} Y$ véges, emiatt ε izomorfizmus is. □

6.27. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ *egy majdnem felhasadó sorozat. Ekkor az alábbiak igazak.*

1., *Pontosan akkor létezik* $\gamma : Z' \to Z$ *irreducibilis morfizmus, ha* $Z' \overset{\oplus}{\leq} Y$ *és* $\gamma = \iota_{Z'}\beta$, *ahol* $\iota_{Z'}$ *a természetes beágyazása* Z'*-nek* Y*-ba;*

2., *Pontosan akkor létezik* $\gamma : X \to X'$ *irreducibilis morfizmus, ha* $X' \overset{\oplus}{\leq} Y$ *és* $\gamma = \alpha\pi_{X'}$, *ahol* $\pi_{X'}$ *a természetes vetítés* Y*-ból* X'*-re;*

Bizonyítás. Csak az első állítást látjuk be, a második (duális) állítás is hasonlóan igazolható. Először tegyük fel, hogy létezik $\gamma : Z' \to Z$ irreducibilis morfizmus. Ekkor γ nem felhasadó és a sorozat egy Auslander-Reiten–sorozat, ezért

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl, dashed, "\exists\delta"'] \arrow[d, "\gamma"] & \\ Y \arrow[r, "\beta"'] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

létezik olyan $\delta : Z' \to Y$, amellyel $\delta\beta = \gamma$. A feltétel szerint γ irreducibilis és β nem felhasadó epimorfizmus, ezért δ egy felhasadó monomorfizmus, tehát $Z' \overset{\oplus}{\leq} Y$ és ahogy láttuk $\delta\beta = \gamma$.

A másik irányhoz először is vezessük be a következő jelölést. Általában, ha $\varphi : \oplus_i M_i \to \oplus_j N_j$ egy mod-A-beli homomorfizmus, akkor jelölje ι_i az $M_i \to \oplus M$ és π_i a $M \to M_i$, illetve i_j az $N_i \to N$ és p_j az $N \to N_j$ természetes beágyazásokat és vetítéseket. Ekkor $\varphi_{i,j}$ legyen az $\iota_i\varphi p_j : M_i \to N_j$ homomorfizmus minden i, j-re. Ezzel, ha $m \in M$-et az $(m_1, \ldots, m_k)$, míg $n \in N$-et pedig az $(n_1, \ldots, n_\ell)^\top$ alakba írjuk, akkor φ hatása megkapható úgy is mint a $\Phi = [\varphi_{i,j}]$ mátrixszal való jobb szorzás, hiszen $\varphi = \sum_{i,j} \pi_i\varphi_{i,j}i_j$.

Tegyük fel, hogy $Y = Y_1 \oplus Y_2$, legyen ι_i, illetve π_i a felbontáshoz tartozó természetes beágyazások, vetítések. Elég megmutatni, hogy $\iota_1\beta$ irreducibilis. Legyen $\beta_i = \iota_i\beta$, ezzel $\beta = [\beta_1, \beta_2]^\top$. Tegyük fel, hogy β_1 felbomlik az alábbi módon

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[rr, "\beta_1"] \arrow[dr, "\delta"'] & & Z \\ & U \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

és tegyük fel, hogy δ nem felhasadó epimorfizmus. Belátjuk, hogy ekkor γ felhasadó monomorfizmus. Mivel $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ majdnem felhasadó, ezért

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, "\delta"] \arrow[dl, dashed, "\exists\varepsilon"'] & \\ Y \arrow[r, "\beta"'] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

létezik olyan δ, amelyre $\varepsilon\beta = \delta$. Írjuk ε-t $\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ alakba, ahol $\varepsilon_i = \varepsilon\pi_i : U \to Y_i$. Ezzel az alábbi

$$\begin{tikzcd} Y_1 \oplus Y_2 \arrow[r, "\begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}"] \arrow[dr, "\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}"'] & U \oplus Y_2 \arrow[r, "\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}"] \arrow[d, "\begin{bmatrix} \delta \\ \beta_2 \end{bmatrix}"'] & Y_1 \oplus Y_2 \arrow[dl, "\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, ugyanis

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\delta \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad \text{ill.} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon\beta \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

Ekkor viszont

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

A 6.26. Lemma szerint $\beta = [\beta_1, \beta_2]^\top$ jobbminimális, és ezért a

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\varepsilon_1 & \gamma\varepsilon_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

egy izomorfizmus, speciálisan epimorfizmus. A képe $\operatorname{im} \gamma\varepsilon_1 \oplus Y_2 = Y_1 \oplus Y_2$, amiből az következik, hogy $\gamma\varepsilon_1 : Y_1 \to Y_1$ szintén epimorfizmus, sőt izomorfizmus is, mert Y_1 véges dimenziós. Ezzel azt kaptuk, hogy γ felhasadó monomorfizmus. □

6.28. Tétel (Auslander-Reiten–tétel)**.** *Tetszőleges véges dimenziós A algebrára az alábbi állítások igazak.*

- a., *Ha $Z \in \text{ind-}A$ nem projektív, akkor létezik olyan majdnem felhasadó sorozat, amely Z-vel végződik.*
- b., *Ha $X \in \text{ind-}A$ nem injektív, akkor létezik olyan majdnem felhasadó sorozat, amely X-szel kezdődik.*

Továbbá az a., és b., állításokban szereplő majdnem felhasadó sorozatok lényegében egyértelműek is, azaz ha $0 \to X \to Y \to Z$ egy majdnem felhasadó sorozat, akkor ha $0 \to X' \to Y' \to Z \to 0$ (ill. $0 \to X \to Y' \to Z' \to 0$) szintén majdnem felhasadó sorozat, akkor $X \cong X'$ és $Y \cong Y'$ (ill. $Y \cong Y'$ és $Z \cong Z'$). □

6.29. Definíció. Legyen $Z \in \text{ind-}A$ egy nem projektív modulus. Egy $X \in \text{mod-}A$ modulust, amellyel $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ egy majdnem felhasadó sorozat, a Z Auslander-Reiten eltoltjának nevezzük és τZ-vel jelöljük. Ha X a Z Auslander-Reiten eltoltja, akkor Z az X inverz eltoltja, azaz $Z = \tau^{-1}X$.

Az A véges dimenziós algebra moduluskategóriáját grafikus módon kívánjuk szemléltetni. Ahogy azt korábban megjegyeztük, a redundancia elkerülése céljából csak ind-A izomorfiaosztályait és az egyes osztályokban szereplő reprezentánsok közötti irreducibilis morfizmusokat tekintjük. Az A algebrához ily módon egy irányított gráfot rendelünk, az A ún. Auslander-Reiten–gráfját, vagy röviden AR–gráfját.

Az A AR–gráfjának csúcsait megfeleltetjük ind-A izomorfiaosztályainak és a gráf két X, Y pontja közti nyilak reprezentálják az $X \to Y$ típusú irreducibilis morfizmusokat. Ennél a pontnál azonban elővigyázatosnak kell lennünk, ugyanis azt látjuk, hogy ha $\alpha : X \to Y$ egy irreducibilis morfizmus, akkor például tetszőleges $\lambda \in K$ nem 0 skalárral a $\lambda\alpha$ szintén irreducibilis morfizmus, és nyilván felesleges minden $\lambda\alpha$ morfizmust külön nyíllal jelölni.

Ha az X, Y két A-modulus és $\mathrm{Irr}_A(X, Y)$ jelöli az $X \to Y$ típusú irreducibilis morfizmusokat, akkor általában elmondhatjuk, hogy $\mathrm{Irr}_A(X, Y)$ szintén egy K-lineáris tér (sőt valójában $\mathrm{End}_A(X) - \mathrm{End}_A(Y)$ bimodulus is, de erre most nincs szükségünk). Kihasználva a lineáris struktúrát, az $X \to Y$ irreducibilis morfizmusokat is tömören tudjuk jelölni az AR–gráfban $X \to Y$ típusú nyilakkal. Rögzítsük $\mathrm{Irr}_A(X, Y)$ egy bázisát és az A AR–gráfjában az $X \to Y$ nyilak feleljenek meg egyértelműen e rögzített bázis elemeinek.

A 6.28. Tétel további információt ad az A AR–gráfjának szerkezetéről. Tekintsünk egy Z nem projektív felbonthatatlan modulust. Ekkor létezik egy (izomorfia erejéig) egyértelmű (nem injektív, felbonthatatlan) X, amivel $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ egy majdnem felhasadó sorozat. Vagy másképp az X a Z Auslander-Reiten eltoltja, Z pedig az X inverz eltoltja. Az A AR–gráfjában ezt az információt az alábbi módon jelöljük:

$$X \text{ - - - - - - - } Z$$

Ha P projektív, Q pedig injektív modulus ind-A -ban, akkor P nem rendelkezik Auslander-Reiten eltolttal, Q pedig nem rendelkezik inverz eltolttal. Ezt a gráfban „$[P$”, illetve „$Q]$” jelöli. Amennyiben $M \in$ ind-A projektív és injektív is, úgy M nek sem eltoltja, sem inverz eltoltja nincs, ezért a gráfban $[M]$-et írunk. A 6.27. Tétel szerint az összes X-ből induló irreducibilis morfizmus Y valamely direkt komponensébe érkezik, és az összes Z-be érkező irreducibilis morfizmus Y valamely direkt összeadandójából érkezik. Ha $Y = \oplus_i Y_i$ az Y direkt felbonthatatlan Y_i modulusokra való felbontása (esetleg előfordulhat, hogy $Y_i \cong Y_j$), ekkor az A AR–gráfjában minden X-ből kimenő nyíl végpontja valamelyik Y_i és minden Z-be érkező nyíl kezdőpontja valamelyik Y_i. (Ha esetleg Y_i többször is megjelenik Y felbontásában, akkor a gráfban többszörös él mutat Y_i-be.) Tehát a gráfban ez egy

$$\begin{tikzcd}
 & Y_1 \arrow[dddr] & \\
 & Y_2 \arrow[ddr] & \\
 & \vdots & \\
X \arrow[uuur] \arrow[uur] \arrow[dr] \arrow[dddr] \arrow[rr, dashed, no head] & & Z \\
 & Y_i \arrow[ur] & \\
 & \vdots & \\
 & Y_n \arrow[uuur] &
\end{tikzcd}$$

részgráfot ad meg. Az AR–gráf egy ilyen blokkját, amely áll egy X modulusból, τX eltoltjából, illetve az összes τX-ből induló és az összes X-be érkező irreducibilis morfizmusból az AR–gráf egy *mesh*-ének nevezzük. Vegyük észre, hogy egy mesh pontosan akkor teljes, ha $\dim_K \tau X + \dim_K X = \sum_i m_i \cdot \dim_K Y_i$, hiszen a $0 \to \tau X \to \oplus_i Y_i^{m_i} \to X \to 0$ egy rövid egzakt sorozat.

Az eddigi észrevételek alapján azt mondhatjuk, hogy az A AR–gráfjának felírásához jó stratégia lehet, hogy kiindulunk egy nem projektív (sőt ha lehet, akkor injektív) Z felbonthatatlan modulusból, meghatározzuk a τZ eltoltját, és a $0 \to \tau Z \to Y \to Z \to 0$ majdnem felhasadó sorozatot, amiből leolvassuk az Z-ben végződő irreducibilis morfizmusokat. Majd az eljárást Z helyett τZ-vel folytatjuk, ha lehet. Ha $\tau^n Z$ már projektív, akkor pedig egy új nem projektív modulussal kezdjük el ezt az eljárást. Az első kérdés az, hogy hogyan határozhatjuk meg a Z nem projektív modulus Auslander-Reiten–eltoltját.

6.30. Definíció. Legyen $X \in$ Mod-A tetszőleges modulus. Azt mondjuk, hogy a $\varphi : P \twoheadrightarrow X$ epimorfizmus az X projektív fedése, ha P projektív és $\ker \varphi \in \mathrm{rad}\, P$.

6.31. Megjegyzés. Megyjegyezzük, hogy egy tetszőleges R gyűrű esetén az $X \in$ Mod-R modulusnak nem biztos, hogy létezik projektív fedője. Azonban, ha A egy véges dimenziós algebra, $X \in$ mod-A, akkor a projektív fedés létezik és lényegében egyértelmű. Pontosabban, ha $\varphi_1 : P_1 \to X$ és $\varphi_2 : P_2 \to X$ az X két projektív fedése, akkor létezik $\alpha : P_2 \to P_1$, amivel $\varphi_2 = \alpha\varphi_1$, speciálisan $P_2 \cong P_2$. Az α létezéséhez használjuk a P_2 projektív modulus univerzális tulajdonságát.

$$\begin{tikzcd} & P_2 \arrow[dl, dashed, "\exists\alpha"'] \arrow[d, two heads, "\varphi_2"] \\ P_1 \arrow[r, two heads, "\varphi_1"'] & X \end{tikzcd}$$

Tehát $\alpha : P_2 \to P_1$ olyan, hogy $\alpha\varphi_1 = \varphi_2$. Mivel A véges dimenziós, tehát Artin, ezért $\ker \varphi_1 \leq \mathrm{rad}\, P_1 \ll P_1$. Viszont $(\mathrm{im}\, \alpha)\varphi_1 = \mathrm{im}\, \varphi_1$, amiből $P_1 = \mathrm{im}\, \alpha + \ker \varphi_1$ adódik. Tehát α epimorfizmus. A P_1 projektív, ezért α felhasadó is, így $\ker \alpha$ direkt összeadandója P_2-nek. Ám $\ker \alpha \leq \ker \alpha\varphi_2 = \ker \varphi_2 \leq \mathrm{rad}\, P_1$ miatt $\ker \alpha = 0$.

A projektív fedés létezéséhez tekintsünk egy tetszőleges $X \in$ mod-A modulust. Láttuk (5.31. és5.68.), hogy $X/\mathrm{rad}\, X$ féligegyszerű, és a végesen generáltság miatt írhatjuk, hogy $X/\mathrm{rad}\, X = \oplus_{i=1}^n S_i^{m_i}$, ahol $S_i \not\cong S_j$, ha $i \neq j$, és $S_i^{m_i}$ az S_i modulus m_i-edik direkt hatványa. Az 5.78. Tétel szerint ekkor létezik egy $\varphi' : P = \oplus_{i=1}^n P_i^{m_i} \to X/\mathrm{rad}\, X$ epimorfizmus, amelynek a magja $\mathrm{rad}\, P$. Mivel P projektív, ezért

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists\varphi"'] \arrow[d, "\varphi'"] \\ X \arrow[r, two heads, "\mu"'] & X/\mathrm{rad}\, X \end{tikzcd}$$

létezik olyan $\varphi : P \to M$, amellyel $\varphi\mu = \varphi'$. A φ szükségképpen szürjektív, különben $\mathrm{im}\, \varphi$ benne van egy maximális $M \leq X$ modulusban, és ha $\sigma : X \to M/X$ természetes homomorfizmus, akkor egyrész $\varphi\sigma = 0$, másrész σ faktorizálható a μ-n keresztül, azaz $\sigma = \mu\eta$, amiből $\varphi\mu\eta = 0$ következik. Ez ellentmond φ' szürjektív tulajdonságának. Az pedig, hogy $\ker \varphi \leq \mathrm{rad}\, P$ adódik abból, hogy $\ker \varphi \leq \ker \varphi\mu = \ker \varphi' = \mathrm{rad}\, P$.

6.32. Definíció. Ha $X \in$ mod-A egy tetszőleges modulus, akkor a

$$\ldots \to P_i \xrightarrow{\alpha_1} \ldots \xrightarrow{\alpha_1} P_1 \xrightarrow{\alpha_0} P_0 \to M \to 0$$

sorozat az X egy projektív feloldása, ha a sorozat egzakt és minden i-re P_i projektív modulus. Továbbá a sorozat egy minimális projektív feloldása az X-nek, ha még az is teljesül, hogy $\ker \alpha_i \leq \operatorname{rad} P_i$ minden i esetén.

6.33. Megjegyzés.

- Vegyük észre, hogy mod-A-ban minden X modulus minimális projektív feloldása létezik és lényegében egyértelmű. A megkonstruálásához először vegyük az X-nek az $\alpha_0 : P_0 \to X$ projektív fedését, majd legyen $\alpha_1 : P_1 \to \ker \alpha_0 \leq P_0$ projektív fedés, és így tovább.
- A továbbiakban gyakran lesz szükség a $\operatorname{Hom}_A(-, A) : \text{mod-}A \to A\text{-mod}$ funktorra. Az egyszerűség kedvéért az $M \in \text{mod-}A$ képét jelüljük M^*-gal. Tehát $M^* = \operatorname{Hom}_A(M, A)$. Hasonlóan, ha $\alpha : M \to N$ egy mod-A-beli homomorfizmus, akkor a $\operatorname{Hom}_A(-, A)$ általi képe legyen az $\alpha_1^* : N^* \to M^*$.

6.34. Definíció. Legyen $M \in \text{ind-}A$ egy nem projektív modulus. Legyen az M minimális projektív feloldása $\ldots \to P_1 \to P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \to 0$. Ekkor az M transzponáltja $\operatorname{Tr} M = P_1^* / \operatorname{im} \alpha_1^* \in A\text{-mod}$. Másképp, $\operatorname{Tr} M$ az az A-mod -beli modulus, amelyre az $P_0^* \xrightarrow{\alpha_1^*} P_1^* \to \operatorname{Tr} M \to 0$ egzakt.

6.35. Állítás. *Legyen M egy felbonthatatlan nem projektív modulus, amelynek minimális projektív feloldása $\ldots \to P_1 \to P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \to 0$. Az M Auslander-Reiten–eltoltja $\tau M = \ker D(\alpha_1^*)$.* □

6.36. Megjegyzés. Korábban láttuk, hogy a D dualitás funktor rövid egzakt sorozatokat rövid egzakt sorozatba képez. Emiatt tetszőleges egzakt sorozatot egzakt sorozatba képez, vagyis τM az a modulus, amellyel a

$$0 \to \tau M \longrightarrow D(P_1^*) \xrightarrow{D(\alpha_1^*)} D(P_0^*)$$

sorozat egzakt. Világos, hogy $D(P_1^*), D(P_0^*)$ modulusok és a $D(\alpha_1^*)$ homomorfizmus ismeretében könnyen meghatározható τM.

Az $D(P_1^*), D(P_0^*)$ modulusok injektív modulusok, sőt ha $P_i \cong \oplus_j e_j A^{m_j}$, akkor $D(P_i^*) \cong \oplus_j D(Ae_j)^{m_j}$. Ugyanis $\operatorname{Hom}_A(e_j A, A) \cong Ae_j$ mint bal A-modulusok a $\varphi \mapsto (e_j)\varphi$ izomorfizmuson keresztül. Továbbá mivel mind P_0, mind P_1 véges sok $e_j A$ alakú modulus direkt összege, ezért $\operatorname{Hom}_A(P_i, A) = \operatorname{Hom}_A(\oplus_j e_j A^{m_j}, A) \cong \oplus_j \operatorname{Hom}_A(e_j A, A)^{m_j}$. Tehát τM meghatározásához a P_0, illetve P_1 projektív modulusok felbonthatatlan komponeneseihez tartozó injektív modulusait kell megkeresnünk és meg kell határozni, hogy mi az $\alpha_1 : P_1 \to P_0$ homomorfizmusnak megfelelő $D(\alpha_1^*) : D(P_1^*) \to D(P_0^*)$ homomorfizmus.

6.37. Példa. Tekintsük a korábbi, 6.20. Példa szerinti A algebrát. Az A reguláris modulusának Loewy–diagramja

$$A_A = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Határozzuk meg az A Auslander-Reiten–gráfját! Először megkeressük meg az $S(1)$ egyszerű modulus $\tau S(1)$ Auslander-Reiten–eltoltját. Láttuk, hogy mind a $P(1) = e_1 A$, mind a $P(2) = e_2 A$ felbonthatatlan projektív modulus egyben injektív is és a $P(1)$ az $S(1)$-hez tartozó $Q(1)$, a $P(2)$ az $S(2)$-höz tartozó $Q(2)$ felbonthatatlan injektív modulus.

Az $S(1)$ egyszerű modulus minimális projektív feloldása

$$\cdots \to \begin{matrix}\boxed{2}\\1\\2\end{matrix} \xrightarrow{\alpha_1} \begin{matrix}1\\\boxed{2}\\1\end{matrix} \longrightarrow S(1) \to 0,$$

ahol a kis négyzetek jelölik, hogy a $P_1 \cong P(2)$-t generáló altér a $P_0 \cong P(1)$ melyik alterébe képeződik az $\alpha_1 : P_1 \to P_0$ homomorfizmus mentén. A $\tau S(1)$ az a modulus, amelyre a

$$0 \to \tau S(1) \longrightarrow \begin{matrix}\boxed{2}\\1\\2\end{matrix} \xrightarrow{D(\alpha_1^*)} \begin{matrix}1\\\boxed{2}\\1\end{matrix}$$

sorozat egzakt. Mivel $\alpha_1 \neq 0$, ezért $D(\alpha_1^*)$ sem lehet 0, így $\ker D(\alpha_1^*) \cong S(1)$. Tehát valóban a $D(\alpha_1^*)$ hatását jelölik a kis négyzetek az ábrán, következésképp $\tau S(2) = S(1)$. Szimmetria okokból $\tau S(1) = S(2)$.

Tekintsük most az $M = \mathrm{rad}\ P(2)$ modulust, keressük meg ennek az eltoltját. A modulus minimális projektív feloldása

$$\begin{matrix}\boxed{1}\\2\\1\end{matrix} \xrightarrow{\alpha_1} \begin{matrix}1\\2\\\boxed{1}\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}1\\2\end{matrix} \to 0,$$

így τM az a modulus, amelyre a

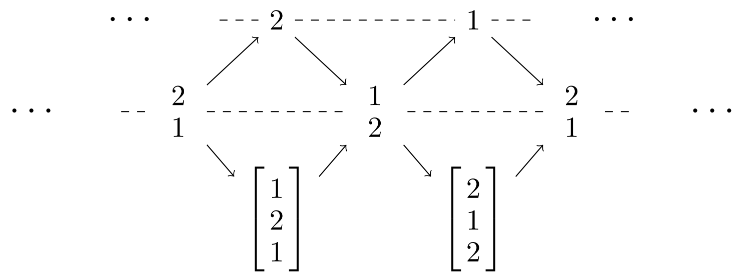
$$0 \to \tau M \longrightarrow \begin{matrix}\boxed{1}\\2\\1\end{matrix} \xrightarrow{D(\alpha_1^*)} \begin{matrix}1\\2\\\boxed{1}\end{matrix}$$

sorozat egzakt. Ismét elmondhatjuk, hogy α_1 nem 0, ezért $D(\alpha_1^*)$ sem az, ezért $\mathrm{im}\, D(\alpha_1^*) = \mathrm{soc}\, P(1)$, ahogy azt az ábrán jelöltük, és ebből $\tau M = \ker D(\alpha_1^*) = \mathrm{rad}\ P(1)$. Szimmetria okokra hivtakozva $\tau\, \mathrm{rad}\ P(1) = \mathrm{rad}\ P(2)$.

Az eddig rendelkezésre álló információk alapján az A AR–gráfjának alábbi részletét ismerjük.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \cdots & & -\,-\,-\;2 & -\,-\,-\,-\,-\,-\,- & 1\;-\,-\,- & & \cdots & \\
\cdots & -\,- & \begin{matrix}2\\1\end{matrix} & -\,-\,-\,-\,-\,- & \begin{matrix}1\\2\end{matrix} & -\,-\,-\,-\,-\,- & \begin{matrix}2\\1\end{matrix} & -\,- & \cdots \\
 & & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & & & \\
 & & & \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} & & &
\end{array}$$

A gráfban igazából a rad $P(1)$ csak egyszer szerepelne, de a gráf átláthatóbb, ha többször is berajzoljuk ezt a pontot. Az ábrán berajzolt irreducibilis morfizmusok a $\mathrm{rad}\ P(i) \rightarrowtail P(i)$, illetve $Q(i) \twoheadrightarrow Q(i)/\mathrm{soc}\, Q(i)$ kanonikus morfizmusok (ld. 6.22.). Egy $M, \tau M$ pár egy $0 \to \tau M \to N \to M \to 0$ rövid egzakt sorozatot határoz meg. Emiatt $\dim_K N = \dim_K \tau M + \dim_K M$, vagyis egyszerű dimenzió számolással eldönthetjük, hogy megtaláltuk-e az összes τM-ből induló, illetve M-be érkező irreducibilis morfizmust. Látjuk, hogy a rad $P(2)$-höz tartozó mesh még nem teljes, hiszen $\dim_K \operatorname{rad} P(2) + \dim_K \operatorname{rad} P(1) = 4$ és $\dim_K P(1) = 3$. Ezért a meshből még egy 1-dimenziós (és így szükségképpen egyszerű) modulus hiányzik. A kompozíció faktorok vizsgálatából az is látszik, hogy a hiányzó egyszerű csak $S(2)$ lehet, hiszen $\operatorname{rad} P(2)$-ben és $\operatorname{rad} P(1)$-ben összesen kétszer, míg $P(1)$ csak 1-szer szerepel $S(2)$ kompozíciófaktorként. Ugyanez a gondolat a $\operatorname{rad} P(1)$ meshében is működik. Ezért további nyilakat rajzolhatunk be a gráfba.



Vegyük észre, hogy az új nyilakkal az $S(1)$ és az $S(2)$-höz tartozó mesheket is megkaptuk. Sőt az is igaz, hogy az A AR–gráfjának ez egy összefüggő komponense, amely csak véges sok különböző pontot tartalmaz. Később látni fogjuk, hogy ebből már következik, hogy ez a teljes AR–gráfja A-nak.

6.3. Brauer-Thrall–sejtések

6.38. Definíció. Azt mondjuk, hogy az A algebra véges reprezentáció-típusú, ha ind-A véges, azaz ha A-nak izomorfiától eltekintve csak véges sok felbonthatatlan modulusa van. Az A végtelen reprezentáció-típusú, ha nem véges reprezentáció-típusú.

6.39. Példa. A Kronecker–algebra nem véges reprezentáció-típusú. A Kronecker–algebra az az $A = K\Gamma$ gráf algebra, amelynek gráfja

$$1 \ \bullet \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \bullet \ 2, \qquad \text{illetve Loewy–diagramja} \quad A_A = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ {}^{\alpha}\swarrow & & \searrow^{\beta} \\ 2 & & 2 \end{smallmatrix} \oplus 2.$$

Könnyű meggondolni, hogy az alábbi modulusok mind felbonthatatlanok és páronként nem izomorfak.

$$\begin{smallmatrix} & 1 & \\ {}^{\alpha}\swarrow & & \searrow^{\beta} \\ 2 & & 2 \end{smallmatrix}\ ; \quad \begin{smallmatrix} & 1 & & 1 \\ {}^{\alpha}\swarrow & & \searrow^{\beta}\ \swarrow_{\alpha} & \\ 2 & & 2 & \end{smallmatrix}\ ; \quad \begin{smallmatrix} & 1 & & 1 & \\ {}^{\alpha}\swarrow & & \searrow^{\beta}\ \swarrow_{\alpha} & & \searrow^{\beta} \\ 2 & & 2 & & 2 \end{smallmatrix}\ ; \quad \begin{smallmatrix} & 1 & & 1 & & 1 \\ {}^{\alpha}\swarrow & & \searrow^{\beta}\ \swarrow_{\alpha} & & \searrow^{\beta}\ \swarrow_{\alpha} & \\ 2 & & 2 & & 2 & \end{smallmatrix} \quad \cdots$$

6.40. Tétel (Higman–tétel)**.** *Legyen G egy véges csoport, és* $\operatorname{char} K = p \neq 0$. *Akkor az $A = KG$ csoportalgebra pontosan akkor véges reprezentáció-típusú, ha a G csoport p prímhez tartozó P Sylow–részcsoportja ciklikus.* □

Sejtés (Brauer-Thrall I.)**.** Tegyük fel, hogy az A véges dimenziós algebra esetén létezik egy olyan b véges szám, hogy minden $X \in$ ind-A esetén $\dim_K X < b$. Ekkor A véges reprezentáció-típusú.

Sejtés (Brauer-Thrall II.)**.** Tegyük fel, hogy az A véges dimenziós algebra végtelen reprezentáció-típusú. Ekkor végtelen sok olyan pozitív d egész létezik, hogy minden d esetén található végtelen sok páronként nem izomorf d-dimenziós felbonthatatlan modulus.

Csak az I. sejtéssel foglalkozunk, ezt egy általánosabb tétel igazolásával bizonyítjuk be. Világos, hogy az I. sejtés igazsága következik az alábbi a 6.41. Tételből.

6.41. Tétel. *Legyen A egy összefüggő algebra (azaz A nem bomlik gyűrűk direkt összegére). Ha C az A AR–gráfjának egy összefüggő komponense és létezik olyan véges b, hogy minden $X \in C$ modulus esetén $\dim_{\mathrm{K}} X < b$, akkor C az A AR–gráfja és C véges.*

A tétel bizonyításához némi előkészületre lesz szükségünk.

6.42. Lemma. *Az A AR–gráfja lokálisan véges (azaz minden pont ki- és befoka véges) és nem tartalmaz hurokéleket.*

Bizonyítás. Először indirekt tegyük fel, hogy létezik egy $X \to X$ hurokél. Akkor ennek megfelel egy $\alpha : X \to X$ irreducibilis morfizmus, ami vagy mono- vagy epimorfizmus (6.19.). Mindkét esetben α izomorfizmus, mert $\dim_{\mathrm{K}} X$ véges, ez viszont ellentmondás, mert így α felhasadó.

Ha X injektív modulus, akkor az AR–gráfban X-ből $X/\operatorname{soc} X$ mindenegyes direkt összeadandójába pontosan egy nyíl mutat és ez az összes X-ből kimutató nyíl. Mivel $X/\operatorname{soc} X$ véges diemnziós, ilyen nyílból csak véges sok lehet. Ha X nem injektív, akkor $X = \tau Z$ valamely $Z \in \text{ind-}A$ modulusra, továbbá adódik egy $0 \to X \to \oplus_i Y_i^{m_i} \to Z \to 0$ majdnem felhasadó sorozat, amelyben Y_i-k páronként nem izomorf direkt felbonthatatlan modulusok. Ekkor az AR–gráfban az X-ből m_i darab nyíl mutat Y_i-be, és ez az összes X-ből kimutató nyíl. Mivel X és Z véges dimenziósak, ezért ilyen típusú nyílból is csak véges sok lehet.

Hasonlóan megmutatható, hogy bármely $X \in \text{ind-}A$ befoka az AR–gráfban véges. $\square$

6.43. Lemma (Harada-Sai–lemma)**.** *Tegyük fel, hogy az* ind-A *-beli f homomorfizmus 2^b darab olyan $f_i : M_i \to M_{i+1}$ homomorfizmus szorzata, amelyik egyike sem izomorfizmus és minden i-re $\ell(M_i) \leq b$, ahol $\ell(M)$ az M modulus kompozícióhossza.*

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért jelölje $\ell(f)$ az $\operatorname{im} f$ kompozícióhosszát. Az n-re vonatkozó teljes indukcióval belátjuk, hogy ha f legalább $2^n - 1$ darab nem izomorfizmus szorzata, akkor $\ell(f) \leq b - n$. Legyen $n = 1$ és indirekt tegyük föl, hogy az $f : M \to N$ nem izomorfizmusra $\ell(f) = b$. Mivel $\ell(N) \leq b$, ezért $\operatorname{im} f = N$ és $\ell(f) = \ell(N) = b$. Szükségképpen $\ell(M)$ is b és $\ker f = 0$. Amiből viszont az következik, hogy f izomorfizmus, ami ellentmondás.

Tegyük fel, hogy valamely $1 \geq n < b$-re igaz az állítás. Ekkor az f-et felbonthatjuk az

$$M \underbrace{\to \ldots \to}_{\alpha} U \xrightarrow{g} V \underbrace{\to \ldots \to}_{\beta} N$$

módon $f = \alpha g \beta$ szorzatára, ahol mind α, mind β legalább $2^n - 1$ darab nem izomorfizmus szorzata. Az indukciós feltétel miatt $\ell(\alpha), \ell(\alpha g), \ell(\beta), \ell(g\beta), \ell(\alpha g \beta)$ mind legfeljebb $b - n$. Ha van köztük olyan, amelyik $\leq b - n - 1$, akkor kész vagyunk, ha pedig $\ell(\alpha g \beta) = b - n$, akkor mindegyikük pontosan $b - n$. Tegyük fel, hogy ez a helyzet. Ekkor $\operatorname{im} \alpha \cap \ker g\beta = 0$, különben $\ell(\alpha g \beta) < \ell(im \alpha) = b - n$ volna. Tehát $\operatorname{im} \alpha \oplus \ker g\beta \leq U$. Belátjuk, hogy $\operatorname{im} \alpha + \ker g\beta$ valójában megegyezik U-val. Vegyük észre, hogy

$$\ell(U) = \ell(U/\ker g\beta) + \ell(\ker g\beta) = \ell(\operatorname{im}\, g\beta) + \ell(\ker g\beta) = \ell(\alpha) + \ell(\ker g\beta),$$

amiből $\operatorname{im}\alpha + \ker g\beta = U$. De $\operatorname{im}\alpha \cap \ker g\beta = 0$, tehát $\operatorname{im}\alpha \oplus \ker g\beta = U$. Az U felbonthatatlan és $\operatorname{im}\alpha \neq 0$, tehát $\ker g\beta = 0$ és így speciálisan g injektív.

Hasonlóan megmutatható, hogy $V = \operatorname{im}\alpha g \oplus \ker\beta$, amiből $\operatorname{im}\alpha g \neq 0$ miatt $\operatorname{im} g = V$ következik. Vagyis g mono- és epimorfizmus is, ami ellentmondás. Tehát azt kaptuk, hogy $\ell(f) \leq b - n - 1$. Most $n = b$ választással a lemma állítása adódik. $\square$

6.44. Lemma. *Legyenek f_i-k irreducibilis morfizmusok* ind-A *-ban, amelyekre az*

$$M = M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_2 \to \ldots \to M_t \xrightarrow{f} N$$

homomorfizmusok szorzata nem 0, és tegyük fel, hogy az f egy nem izomorfizmus. Ekkor létezik olyan $f_t : M_t \to M_{t+1}$ irreducibilis morfizmus, és $g : M_{t+1} \to N$ homomorfizmus, hogy $f_1 \ldots f_{t+1} g \neq 0$.

Duálisan, ha $f' : L \to M$ egy olyan nem izomorfizmus, amelyre $f' f_1 \ldots f_t = 0$, akkor létezik olyan $f_0 : M_0 \to M_1$ irreducibilis morfizmus és $g' : L \to M_0$ homomorfizmus, amelyekre $g' f_0 \ldots f_t \neq 0$.

Bizonyítás. Csak az első állítást látjuk be, a duális állítás hasonlóan igazolható. Jelölje h az $f_1 \ldots f_{t-1}$ homomorfizmust.

Először tegyük fel, hogy M_t nem injektív. Ekkor $M_t = \tau Z$ valamely $Z \in$ ind-A -ra és adódik egy majdnem felhasadó $0 \to M_t \to \oplus_i Y_i \to Z \to 0$ sorozat, ahol Y_i felbonthatatlan. Mivel $N \in$ ind-A és $f : M_t \to N$ egy nem izomorfizmus ezért nem is felhasadó monomorfizmus. Mivel a kapott sorozat egy Auslander-Reiten–sorozat, ezért

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[d, "h"'] & Y_i \arrow[d, shift left, "\iota_i"] & & \\
0 \arrow[r] & M_t \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\pi_i"] \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma"] & Z \arrow[r] & 0 \\
 & N & & &
\end{tikzcd}$$

olyan γ, amellyel $\alpha\gamma = f$ és így $h\alpha\gamma = hf$. Legyenek ι_i és π_i az $Y = \oplus Y_i$ felbontáshoz tartozó természetes beágyazások, vetítések. Ekkor $\sum_i \pi_i \iota_i = \mathrm{id}_Y$. Mivel $0 \neq hf = h\alpha\left(\sum_i \pi_i \iota_i\right) f$, ezért van olyan i, hogy $h(\alpha\pi_i)(\iota_i f) \neq 0$. Az $\alpha\pi_i$ irreducibilis morfizmus a 6.27. Tétel szerint, tehát az $f_t = \alpha\pi, g = \iota_i f$ egy jó megtoldás.

Tegyük fel most, hogy az M_t injektív. Ekkor megállapíthatjuk, hogy az $f : M_t \to N$ nem monomorfizmus, különben felhasadó volna és ezért izomorfizmus is, mert $N \in$ ind-A . Azaz $f \neq 0$ és $\ker f \neq 0$. Az M_t felbonthatatlan injektív talpa egyszerű és $\operatorname{soc} M_t \leq \ker f$. Ezért az f faktorizálható az $\tilde{f} : M_t \to M_t / \operatorname{soc} M_t$ természetes homomorfizmuson keresztül.

$$\begin{tikzcd}
M_t \arrow[r, "\tilde{f}"] & M_t/\operatorname{soc} M_t \arrow[r, "\tilde{f}'"] \arrow[d, shift right, "\pi_i"'] & N \\
 & \tilde{M}_i \arrow[u, shift right, "\iota_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Legyen $M_t/\operatorname{soc} M_t = \oplus_i \tilde{M}_i$ felbonthatatlan komponensekre való bontás, ι_i, π_i természetes beágyazásokkal, vetítésekkel. Ekkor a 6.22. Állítás szerint $\tilde{f}\pi_i$ irreducibilis minden i-re. Továbbá, mivel $h\tilde{f}\left(\sum_i \pi_i\iota_i\right)\tilde{f}' = hf \neq 0$, van olyan i, amelyre $h\tilde{f}(\pi_i\iota_i)\tilde{f}' \neq 0$. Egy ilyen i-re az $f_t = \tilde{f}\pi_i$ és $g = \iota_i\tilde{f}'$ egy jó megtoldás. □

6.45. Következmény. *Legyen C egy összefüggő komponens az A AR–gráfjában úgy, hogy a C-ben lévő modulusok kompozíciója korlátos. Ekkor bármely C-beli X és C-n kívüli Y modulusokra* $\operatorname{Hom}_A(X,Y) = \operatorname{Hom}_A(Y,X) = 0$.

Bizonyítás. Indirekt tegyük föl, hogy mégis található a feltételeknek megfelelő $\alpha : X \to Y$ nem 0 homomorfizmus. Ekkor α nem izomorfizmus, mert X-et a C-ből, Y-t pedig C-n kívülről választottuk. A 6.44. Lemmát iteratívan alkalmazva irreducibilis morfizmusok egy tetszőleges hosszú nem 0 szorzatát kapnánk, amely szorzat minden tagja C-beli. Ez ellentmondana a Harada-Sai–lemmának. □

A 6.41. Tétel bizonyítása. Legyen C az A AR–gráfjának egy olyan összefüggő komponense, amely rendelkezik a leírt tulajdonságokkal. Legyen M egy modulus a C-ben. Az M-hez találhatunk olyan $f : P \twoheadrightarrow M$ epimorfizmust, hogy P projektív. Szükségképpen ez a P szintén a C komponensben van (6.45.). Mivel az A algebra összefüggő, ezért a 2.22. Állítás szerint bármely két P_i, P_j projektív modulusa összeköthető nem 0 homomorfizmusok szorzatával. Ebből azt kapjuk, hogy C tartalmazza az összes felbonthatatlan projektív modulusát A-nak, amiből azt kapjuk, hogy C az A teljes AR–gráfja.

Meg kell még mutatni, hogy a gráf véges. A C-ben szereplő modulusok kompozícióhossza legfeljebb b. Az M-hez és P-hez találhatunk olyan $f_1, \ldots, f_t$ irreducibilis morfizmusokat, hogy $f_1 \ldots f_t \in \operatorname{Hom}_A(P, M)$ és $t \leq 2^b$. Ugyanis az $f : P \twoheadrightarrow M$ nem 0 morfizmus megtoldható irreducibilis morfizmusokkal úgy, hogy a kapott homomorfizmusok szorzata nem 0. A Harada-Sai–lemma miatt ez az eljárás $\leq 2^b - 1$ lépés után leáll, vagyis az utolsó lépés izomorfizmus, amelyet irreducibilis morfizmusok előznek meg.

A gráf lokálisan véges, és minden modulus elérhető egy projektív modulusból véges sok lépésben, ezért a gráfnak csak véges sok pontja lehet. □