Gyűrűk és csoportok reprezentációelmélete

II. Csoportok reprezentációelmélete

Készült: Dr. Lukács Erzsébet 2013. tavaszán tartott előadásai alapján

Dr. Lukács Erzsébet, Magyar András*

Jelölések

$\mathbb{Z}$	egész számok gyűrűje
K	test
$M_n(K)$	K test feletti $n \times n$ mátrixok
$\mathrm{GL}_K(V)$	a V (vektortér) invertálható lineáris transzformációi
$\mathrm{Cen}(R)$	R gyűrű centruma
$\mathrm{Z}(G)$	a G csoport centruma

1. Bevezetés, alapfogalmak

A jegyzet második felében a véges csoportok reprezentációelméletével foglalkozunk. A továbbiakban, ha mást nem mondunk, G mindig egy véges csoportot jelöl és, ahogy eddig is, K egy test, továbbá V egy véges dimenziós K-vektortér. Továbbá az első részben rögzített konvenciókat továbbra is fenntartjuk (moduluson jobb modulust értünk, a homomorfizmusok jobbról hatnak, stb...).

1.1. Csoportreprezentációk és a csoportalgebra alapvető tulajdonságai

1.1. Definíció. A G csoport egy reprezentációján egy KG csoportalgebra feletti jobbmodulust értünk.

Vegyük észre, hogy ha $\varphi : G \to \mathrm{GL}_K(V)$ egy csoport-homomorfizmus, akkor φ egyértelműen kiterjed egy $\tilde{\varphi} : KG \to \mathrm{End}_K(V)$ algebra-homomorfizmussá. Valóban a $t\tilde{\varphi} : \sum_g a_g g \mapsto \sum_g a_g((g)\varphi)$ jól definiált és műveletartó leképezés. A $\tilde{\varphi}$ homomorfizmus pedig ellátja V-t egy KG modulus struktúrával (ld. I.).

Fordítva, ha V_{KG} egy jobb modulus, akkor létezik egy $\psi : KG \to \mathrm{End}_K(V)$ egy algebra-homomorfizmus, hogy minden $v \in V, a \in KG$ esetén $va = v(a)\varphi$. Ekkor a ψ algebra-homomorfizmus $\psi\mid_G$ (G elemeire való) leszűkítése egy $\psi\mid_G\colon G \to \mathrm{GL}_K(V)$ csoport-homomorfizmust indukál, hiszen $\psi\mid_G$ képében minden elem invertálható.

Azt mondhatjuk, hogy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben állnak a G csoport reprezentációi és a $G \to \mathrm{GL}_K(V)$ csoporthomomorfizmusok. Emiatt nem okoz

*A jegyzet elkészítését a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal (NKFIH–115288) támogatta

ellentmondást, ha a $\varphi : G \to \mathrm{GL}_K(V)$ csoporthomomorfizmusokat is csoportreprezentációknak hívjuk.

1.2. Definíció. A $\varphi, \psi : G \to \mathrm{GL}_K(V)$ reprezentációk ekvivalensek, ha található olyan $\alpha \in \mathrm{GL}_K(V)$, hogy $(g)\psi = \alpha^{-1}(g)\varphi\alpha$ minden $g \in G$ esetén.

1.3. Megjegyzés. Reprezentációk hasonlósága még általánosabb szituációra is definiálható. Legyen $\varphi : G \to \mathrm{GL}_K(V)$ és $\psi : G \to \mathrm{GL}_K(W)$ két reprezentáció. A φ és a ψ hasonlóak, ha létezik olyan $\alpha : V \to W$ vektortér-izomorfizmus, hogy tetszőleges $g \in G$-re $(g)\psi = \alpha^{-1}(g)\varphi\alpha$.

Az általánosság megszorítása nélkül mindig feltehetjük, hogy $V = W$.

1.4. Állítás. *A $\varphi, \psi : G \to \mathrm{GL}_K(V)$ pontosan akkor ekvivalens reprezentációk, ha az általuk meghatárázott modulusok izomorfak.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha \in \mathrm{GL}_K(V)$ tetszőleges transzformáció. Ekkor α pontosan akkor KG-modulus izomorfizmus is, ha tetszőleges $v \in V, g \in G$ esetén $((v)\alpha)(g)\psi = (v)(g)\varphi\alpha$. Vagyis, ha φ és ψ ekvivalensek (az $\alpha \in \mathrm{GL}_K(V)$-n keresztül). $\square$

1.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\varphi : G \to \mathrm{GL}_K(V)$ reprezentáció irreducibilis, ha a φ által meghatározott modulus egyszerű. Másképp, ha V-nek nincs nem triviális $(G)\varphi$-invariáns altere.

1.6. Megjegyzés. Ha G egy véges csoport, akkor egy adott K test felett csak véges sok páronként nem izomorf irreducibilis reprezentációja létezik. Sőt az irreducuibilis reprezentációk száma legfeljebb $|G|$.

1.7. Definíció. Legyen A egy véges dimenziós K-agebra. Azt mondjuk, hogy az A egy

1., Frobenius–algebra, ha létezik olyan $\varphi_0 : A \to K$ lineáris függvény (Frobenius–függvény), hogy A semelyik nem triviális jobb- vagy balideálja nem része $\ker \varphi_0$-nak;

2., szimmetrikus algebra, ha A Frobenius–algebra φ_0 Frobenius– függvénnyel, és bármely $a, b \in A$ esetén $(ab)\varphi_0 = (ba)\varphi_0$.

1.8. Állítás. *Tetszőleges K test és G csoport esetén a KG csoportalgebra szimmetrikus.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi_0 : KG \to K$ az a függvény, amelyre $\varphi_0 : 1 \to 1$ és $\varphi_0 : g \to 0$ minden $1 \neq g \in G$ elemre. A KG bázis elemein ilyen módon definiált φ_0-t terjesszük ki lineárisan egy $\varphi : KG \to K$ függvénnyé. Ezzel φ egy szimmetrikus Frobenius–függvény.

Legyen $0 \neq u = \sum a_g g \in KG$. Mivel u nem 0, ezért van olyan $g \in G$, amire $a_g \neq 0$. Ha g ilyen, akkor $(ug^{-1})\varphi_0 \neq 0$, ami miatt $uKG \nleq \ker \varphi$ és hasonlóan $(g^{-1}u)\varphi_0 \neq 0$, amiből $KGu \nleq \ker \varphi$. Tehát $\ker \varphi$ nem tartalmazza KG egyetlen ciklikus jobb-, ill. balideálját sem, így nem tartalmazhatja egyetlen jobb-, ill. balideálját sem.

Ahhoz, hogy belássuk a KG szimmetrikus is, elég belátni, hogy $(gh)\varphi_0 = (hg)\varphi_0$, ahol g, h tetszőleges csoportelemek. Ezt viszont könnyen ellenőrizhetjük, hiszen a $(gh)\varphi_0$ pontosan akkor nem 0, ha $g = h^{-1}$, ebben az esetben pedig $gh = hg = 1$. $\square$

1.9. Állítás. *Minden Frobenius–algebra öninjektív – azaz A_A reguláris modulus egy injektív modulus – és a felbonthatatlan projektív modulusok éppen a felbonthatatlan injektív modulusok.*

Bizonyítás. Elég belátnunk, hogy $A_A \cong D({}_A A)$. Ugyanis az A_A felbonthatatlan komponensei ekkor éppen $D({}_A A)$ felbonthatatlan komponenseinek felelnek meg.

Legyen φ_0 egy rögzített Frobenius–függvény A-n és tekintsük a

$$\begin{aligned} \Phi : A_A &\longrightarrow \mathrm{Hom}_K({}_A A, K) \\ a &\longmapsto (x \mapsto (ax)\varphi_0) \end{aligned}$$

leképezést. Az $(a)\Phi$ minden $a \in A$ esetén egy K-lineáris leképezés, hiszen bármely $x, y \in A$ esetén

$$(\lambda x + \mu y)(a\Phi) = (a(\lambda x + \mu y))\varphi_0 = \lambda(ax)\varphi_0 + \mu(ay)\varphi_0 = \lambda(x)(a\Phi) + \mu(y)(a\Phi).$$

Ezen túl a Φ egy modulus-homomorfizmus is. Teszőleges $x \in A$-ra

$$(x)[(a+b)\Phi] = ((a+b)x)\varphi_0 = (ax+bx)\varphi_0 = (ax)\varphi_0 + (bx)\varphi_0 = (x)(a\Phi) + (x)(b\Phi),$$

illetve bármely $r \in A$ esetén

$$x[(ar)\Phi] = ((ar)x)\varphi_0 = (a(rx))\varphi_0 = (rx)(a\Phi) = (x)[(a\Phi)r].$$

Ahhoz, hogy belássuk Φ izomorfizmus is, elég megmutatni, hogy injektív, hiszen $\dim_K A_A = \dim_K D({}_A A) < \infty$. Vegyünk egy olyan $a \in A$ elemet, amelyre $a\Phi = 0$. Definíció szerint ekkor minden $x \in A$-ra $(ax)\varphi_0 = 0$, vagyis aA egy jobbideál $\ker \varphi_0$-ban, így $aA = 0$, amiből $a = 0$. □

1.10. Megjegyzés. Láttuk, hogy $A_A = \oplus_i e_i A$ az A_A felbonthatatlan projektív modulusokra való felbontása, ahol e_i-k ortogonális idempotensek. Ha A Frobenius, akkor $D(e_i A)$ injektív és izomorf valamelyik $e_j A$-val, ám előfordulhat, hogy $D(Ae_i) \cong e_j A \ncong e_i A$! Például, ha A az az algebra, amely reguláris modulusának Loewy–diagramja

$$A_A = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

akkor $D(Ae_1) \cong e_2 A \ncong e_1 A$. Ám, ha A nem csak egy Frobenius–algebra, de még szimmetrikus is, akkor már igaz, hogy $D(Ae_i) \cong e_i A$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén.

1.11. Állítás. *Ha A egy szimmetrikus algebra, P egy felbonthatatlan projektív A-modulus, akkor* $\mathrm{soc}\, P \cong \mathrm{top}\, P$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $P = eA, S = \mathrm{soc}\, P$ és rögzítsünk egy $\varphi_0 : A \to K$ szimmetrikus Frobenius–függvényt. Az S egyszerű, mert S egy felbonthatatlan injektív modulus talpa az 1.9. Állítás szerint. Az S egy jobbideálja A-nak, ezért $S \nleq \ker \varphi_0$ és így található olyan $a \in A$, amelyre $ea \in S$ és $(ea)\varphi \neq 0$. A φ szimmetrikus, ezért $(eea)\varphi = (eae)\varphi \neq 0$ és persze eae sem 0.

Tekintsük az alábbi

$$\begin{aligned} \psi : eA &\longrightarrow S \\ er &\longmapsto ea(er) \end{aligned}$$

modulus-homomorfizmust. Mivel $eae \in \mathrm{im}\, \psi$, ezért ψ epimorfizmus. Az eA egy felbonthatatlan projektív modulus, emiatt lokális, ezért a $\psi : eA \twoheadrightarrow S$ epimorfizmus magja $\mathrm{rad}\, eA$. Azt kaptuk, hogy $\mathrm{top}\, P = eA/\mathrm{rad}\, eA \cong S = \mathrm{soc}\, S$. □

1.12. Következmény. *Minden csoportalgebra öninjektív és ha P egy csoportalgebra felbonthatatlan projektív modulusa, akkor* $\mathrm{soc}\, P \cong \mathrm{top}\, P$*, továbbá ha $P = eA$, akkor $eA \cong D(Ae)$.*

1.13. Állítás. *Ha A egy véges dimenziós öninjektív bázis algebra, akkor A egy Frobenius–algebra.*

Bizonyítás. Majd. □

1.2. A Maschke–tétel és következményei

1.14. Tétel. *Legyen G egy véges csoport, K egy tetszőleges test. A KG csoportalgebra pontosan akkor féligegyszerű, ha* $\operatorname{char} K = p \nmid |G|$.

Bizonyítás. Először tegyük föl, hogy $\operatorname{char} K = p \mid |G|$. Legyen $a = \sum_{g \in G} g \in KG$. Minden $h \in G$ esetén $ah = ha = a$, vagyis $a \in \operatorname{Cen}(KG)$. Ebből az következik, hogy $aK \lhd KG$. Mivel $a \cdot a = |G|a = 0$ ezért $(aK)^2 = 0$. Tehát aK egy nem 0 nilpotens ideál KG-ben, amit tartalmaz a KG Jacobson–radikálja. Mivel $J(KG)$ így nem 0, ezér a KG nem féligegyszerű.

A megfordításhoz tegyük fel, hogy $\operatorname{char} K \nmid |G|$. Megmutatjuk, hogy ekkor tetszőleges $U \leq KG$ modulushoz létezik direkt kiegészít KG-ben. Ehhez elég megmutatni, hogy az U-hoz található olyan $\varphi \in \operatorname{End}_{KG}(KG)$, hogy $\varphi^2 = \varphi$ és $\ker \varphi = U$. Mivel az U egy altér, ezért világos, hogy található olyan $\pi \in \operatorname{End}_K(KG)$, amelyre $\pi^2 = \pi$ és $\ker \pi = U$. A π lineáris leképezés segítségével definiáljuk KG-nek az alábbi

$$\begin{aligned} \varphi : KG &\longrightarrow KG \\ a &\longmapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (ag)\pi g^{-1} \end{aligned}$$

endomorfizmusát. A φ valóban modulus-homomorfizmus, hiszen K-lineáris a π linearitása miatt és bármely $h \in G$ csoportelemre

$$(ah)\varphi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (ahg)\pi g^{-1} = \underbrace{\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (ahg)\pi g^{-1}h^{-1} \right)}_{\substack{(a)\varphi, \text{ mert a } gh \text{ is} \\ \text{végigfut } G \text{ elemein}}} h.$$

Megmutatjuk, hogy $\ker \varphi \leq \{a - (a)\varphi \mid a \in KG\} \leq U \leq \ker \varphi$. Ha $a \in \ker \varphi$, akkor $a = a - 0 = a - a\varphi$. Fejtsük ki $a - (a)\varphi$-t a φ definíciója alapján:

$$\begin{aligned} a - (a)\varphi = a - \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (ag)\pi g^{-1} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (ag)g^{-1} - \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (ag)\pi g^{-1} = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \underbrace{(ag - (ag)\pi)}_{\in U} g^{-1} \in U, \text{ mert } U \text{ részmodulus.} \end{aligned}$$

Az első két tartalmazást be is láttuk. Mégegyszer használva, hogy U részmodulus KG-ben, ami miatt $ug \in U$ minden $g \in G$-re, azt kapjuk, hogy

$$(u)\varphi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (ug)\pi g^{-1} = 0$$

a π definíciója miatt. Tehát beláttuk, hogy $\ker \varphi = U$. Ami hátravan még, hogy belássuk, $\varphi^2 = \varphi$. Ha $a \in KG$, akkor $a - (a)\varphi \in \ker \varphi$, ami miatt $(a - (a)\varphi)\varphi = (a)\varphi - (a)\varphi^2 = 0$. Tehát $(a)\varphi = (a)\varphi^2$. □

1.15. Megjegyzés. Azt mondhatjuk, hogy $\operatorname{char} K \nmid |G|$ esetén a KG modulus kategóriája triviális, azaz ind-A véges sok izomorfiaosztállyal rendelkezik, és nem egymással nem izomorf ind-A -beli modulusok között nem létezik nem 0 morfizmus semmilyen irányban sem.

Az egyetlen értelmes cél, ami kitűzhető ebben az esetben, az az, hogy határozzuk meg (izomorfia erejéig) az összes egyszerű KG modulust, azaz az összes irreducibilis reprezentációját G-nek. Abban az esetben, amikor $\operatorname{char} K = 0$ és K algebrailag zárt (pl. $K = \mathbb{C}$), a reprezentációkhoz kapcsolt *karakter*ek elmélete lesz segítségünkre.

1.16. Lemma (Schur–lemma). *Legyen R egy tetszőleges gyűrű, S pedig egy egyzerű R-modulus. Ekkor $\operatorname{End}_R(S)$ egy ferdetest.*

Bizonyítás. Ha $\varphi \in \operatorname{End}_R(S)$ egy nem 0 endomorfizmus, akkor $\ker\varphi \lneq S$ és az S egyszerűsége miatt $\ker\varphi = 0$ lehet csak. Hasonlóan $\operatorname{im}\varphi \neq 0$, de akkor $\operatorname{im}\varphi = S$, tehát a φ egy izmorfizmus, így invertálható. □

1.17. Állítás. *Legyen A egy algebrailag zárt K test feletti véges dimenziós algebra. Ha $S \in \text{Mod-}A$ egyszerű, akkor $\operatorname{End}_A(S) \cong K$.*

Bizonyítás. Legyen $D = \operatorname{End}_A(S)$. A Schur–lemma miatt D egy ferdetest. Minden $\lambda \in K$ esetén az $s \mapsto \lambda s$ az S egy endomorfizmusa, tehát D tartalmaz egy K-val izomorf résztestet. Mivel S egyszerű modulus, ezért létezik $A \to S$ epimorfizmus, amiből látjuk, hogy $\dim_K S < \infty$. Tetszőleges $u \in \operatorname{End}_A(S)$ egy K-lineáris transzformációja S-nek, mivel K algebrailag zárt, ezért van $\lambda \in K$ sajátértéke. Az $u - \lambda \operatorname{id}_S$ nem invertálható, de S egyszerűsége miatt a magja akkor csak a teljes S lehet. Az kaptuk, hogy $u = \lambda \operatorname{id}_S$. □

1.18. Tétel. *Legyen A egy algebrailag zárt K test feletti véges dimenziós féligegyszerű algebra. Ekkor $A \cong \oplus_{i=1}^r M_{n_i}(K)$ és az A feletti egyszerű $S_1, \dots, S_r$ modulusokra $\dim_K S_i = n_i$.*

Bizonyítás. Az A algebra féligegyszerű, ezért A_A egy féligegyszerű modulus. Legyen $A_A = \oplus_{i=1}^r R_i$, ahol R_i-k az A algebra egyes blokkjai úgy, hogy $R_i = \oplus^{n_i} S_i$. Láttuk, hogy $A \cong \operatorname{End}_A(A_A)$, ha az endomorfizmusokat balról írjuk. Viszont

$$\operatorname{End}_A(A) \cong \oplus_{i=1}^r \operatorname{End}_A(R_i) = \oplus_{i=1}^r \operatorname{End}_A(\oplus^{n_i} S_i) \cong \oplus_i^r M_{n_i}(\operatorname{End}_A(S)) = \oplus_i^r M_{n_i}(K).$$

Az $M_{n_i}(K)$ egy egyszerű komponensét a

$$\begin{array}{cc}\begin{bmatrix} 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ i.\text{ sor} \\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

alakú mátrixok alkotják. Világos, hogy az R_i blokk n_i darab n_i-dimenziós S_i típusú egyszerű modulus direkt összege. □

1.19. Következmény. *Legyen K egy algebrailag zárt test és legyen $S_1, \dots, S_r$ az összes páronként nem izomorf egyszerű KG-modulus, amelykre $\dim_K S_i = n_i$. Tegyük fel, hogy $\operatorname{char} K \nmid |G|$. Ekkor*

$$\dim_K KG = |G| = \sum_{i=1}^r n_i^2 = \sum_{i=1}^r \dim_K R_i.$$

Ha pedig $\operatorname{char} K \mid |G|$, akkor $J(KG) \neq 0$ és a $KG/J(KG)$ algebra féligegyszerű. Továbbá $\dim_K KG/J(KG) = \sum_{i=1}^r n_i^2$. Speciálisan $\sum n_i^2 < |G|$.

1.3. Lineáris reprezentációk

1.20. Definíció. A G csoport 1-dimenziós reprezentációit lineáris reprezentációnak nevezzük.

Tekintsünk egy $\varphi : G \to \mathrm{GL}_K(V)$ reprezentációt. Tegyük fel, hogy $N \lhd G$ egy olyan normális részcsoport, amelyet $\ker\varphi$ tartalmaz. Ekkor φ tekinthető a G/N faktorcsoport egy reprezentációjának. Speciálisan, ha V egydimenziós, vagyis $\mathrm{GL}_K(V) = K$, akkor $G' \leq \ker\varphi$ és a φ tekinthető a G/G' egy reprezentációjának.

1.21. Állítás. *Legyen G egy véges csoport, K egy algebrailag zárt test, amelyre* $\mathrm{char}\, K \nmid |G|$. *Jelölje $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_t$ a G csoport különböző konjugáltosztályait és legyen $K_i = \sum_{g\in\mathcal{K}_i} g \in KG$ az i. osztályösszeg. A $\{K_1, \ldots, K_t\}$ a* $\mathrm{Cen}(KG)$ *egy K-bázisa.*

Bizonyítás. Az világos, hogy $K_i \in \mathrm{Cen}(KG)$, mert bármely $h \in G$ esetén $h^{-1}K_ih = \sum_{g\in\mathcal{K}_i} h^{-1}gh = \sum_{g\in\mathcal{K}_i} g = K_i$. Másrészt $\{K_1, \ldots, K_t\}$ független, mert különböző csoportelemek összegei. Azt kell csak belátni, hogy $\{K_1, \ldots, K_t\}$ generálja $\mathrm{Cen}(KG)$-t. Legyen $z \in \mathrm{Cen}(KG)$ tetszőleges, és írjuk z-t $z = \sum_g a_g g$ alakba. Mivel $z = h^{-1}zh$, ezért $a_g = a_{g^h}$ minden $g \in G$ esetén. Tehát az a_g együtthatók azonos $\mathcal{K}_i$ osztályból származó g elemek esetén meg kell hogy egyezzenek, így $z \in \sum_i a_iK_i$. □

1.22. Tétel. *Legyen G egy véges csoport, K egy algebrailag zárt test, amelyre* $\mathrm{char}\, K \nmid |G|$. *Ekkor a G csoport K feletti (páronként nem izomorf) irreducibilis reprezentációinak száma megegyezik G konjugáltosztályainak számával.*

Bizonyítás. Számoljuk ki $\dim_K \mathrm{Cen}(KG)$-t kétféleképpen. Először is az 1.21. Állítás alapján $\dim_K \mathrm{Cen}(KG) = |\{G \text{ konjugáltosztályai}\}|$, másrészt

$$\dim_K \mathrm{Cen}(KG) = \dim_K \oplus_{i=1}^r \underbrace{\mathrm{Cen}(M_{n_i}(K))}_{\text{skalármátrixok}} = r,$$

ahol r a G csoport K feletti irreducibilis reprezentációinak száma (ld. 1.17, 1.18). □

1.23. Lemma. *Legyen G egy véges csoport Abel–csoport, K egy algebrailag zárt test, amelyre* $\mathrm{char}\, K \nmid |G|$. *Ekkor a $\varphi : G \to \mathrm{GL}_K(V)$ reprezentcáció pontosan akkor irreducibilis, ha φ lineáris.*

Bizonyítás. Az világos, hogy minden lineáris reprezentáció irreducibilis. Mivel G-nek most pontosan $|G|$ darab konjugált osztálya van, ezért G-nek ponrosan $|G|$ darab irreducibilis reprezentációja van. Ha az irreducibilis reprezentációkhoz tartozó egyszerű modulusok $S_1, \ldots, S_{|G|}$, akkor az 1.19. szerint

$$\sum_{i=1}^{|G|} (\dim_K S_i)^2 = |G|,$$

vagyis $\dim_K S_i = 1$ minden S_i egyszerű modulus esetén. □

1.24. Megjegyzés. Ha A egy véges Abel–csoport, akkor A-nak pontosan $|A|$ darab konjugáltosztálya van és minden konjugáltosztályhoz egyértelműen található egy (irreducibilis) lineáris reprezentáció. Ezeket a reprezentációkat egyszerűen meghatározhatjuk. Tegyük fel, hogy a G prímhatványrendű ciklikus csoportokra való bontása

$$G = C_{m_1} \times \ldots \times C_{m_r} = \langle a_1 \rangle \times \ldots \times \langle a_r \rangle.$$

Legyen ε_{m_i} primitív m_i. egységgyök minden i index esetén. Ekkor

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ a_i &\longmapsto \varepsilon_{m_i}^{t_i} \end{aligned} \tag{1}$$

minden $0 \leq t_i \leq m_i - 1$ esetén egy-egy lineáris reprezentáció. Sőt, ha φ, ψ két (1) típusú reprezentáció, és van olyan $1 \leq i \leq r$, hogy $\varphi(a_i) = \varepsilon_{m_i}^{t_i}$ és $\psi(a_i) = \varepsilon_{m_i}^{t'_i}$, ahol $t_i \neq t'_i$, akkor $\varphi \neq \psi$.

Tehát (1) típusú reprezentációból $m_1 \cdot \ldots \cdot m_r = |A|$ darab van, azaz az A Abel–csoport összes lineáris reprezentációja (1) alakú.

1.25. Következmény. *Legyen G egy véges csoport, K egy algebrailag zárt test, amelyre* char $K \nmid |G|$. *Ekkor G-nek éppen $|G : G'|$ darab lineáris reprezentációja van K felett.*

Bizonyítás. Minden lineáris G-reprezentáció tekinthető a G/G' egy lineáris reprezentációjának. Az 1.23. Lemma miatt G/G' lineáris reprezentációinak száma pedig pontosan $|G/G'|$. □

1.26. Megjegyzés. Az 1.19. és 1.25. Következmények segítségével a kis méretű csoportok esetén meg tudjuk állapítani az irreducibilis $\mathbb{C}$ (vagy bármely $|G|$-t nem osztó karakterisztájú algebrailag zárt test) feletti irreducibilis reprezentációk számát. Mutatunk két egyszerű példát.

- Tekintsük a $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ kvaterniócsoportot. Jelölje $S_1, \ldots, S_r$ a Q irreducibilis $\mathbb{C}$ feletti reprezentációihoz tartozó egyszerű modulusokat. Ekkor

  $$8 = |Q| = \sum_{i=1}^{r} (\dim_K S_i)^2,$$

  továbbá $Q' = \{\pm 1\}$ miatt $|Q : Q'| = 4$, amiből azt látjuk, hogy Q-nak pontosan 4 darab lineáris reprezentációja van. Tehát

  $$8 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + \sum_{i=5}^{r} (\dim_K S_i)^2,$$

  ami csak úgy teljesülhet, ha $r = 5$ és $\dim_K S_5 = 2$.

- Legyen most $G = A_4$ az S_4 szimmetrikus csoport páros permutációinak részcsoportja. Határozzuk meg a $\mathbb{C}A_4$ egyszerű modulusainak számát és azok $\mathbb{C}$-dimenzióit! A csoport mérete $|A_4| = 12$, kommutátor-részcsoportja $A'_4 = V = \{1, (12)(34), (12)(24), (14)(23)\}$, amelynek rendje 4. Így A_4-nek $|A_4 : V| = 3$ lineáris reprezentációja van és

  $$12 = 3 + \sum_{i=4} (\dim_K S_i)^2$$

  alapján $i = 4$ és $\dim_K S_4 = 3$ lehet csak. Vagyis a $\mathbb{C}A_4$ algebrának 3 darab 1-dimenziós és 1 darab 3-dimenziós egyszerű modulusa van.

2. Komplex csoportreprezentációk és karaktereik

Ha G egy véges csoport, akkor a $\mathbb{C}G$ csoportalgebra féligegyszerű és felbomlik $\mathbb{C}G = \oplus_{i=1}^r R_i = \oplus_{i=1}^r M_{n_i}(\mathbb{C})$ mátrixgyűrűk direkt összegére, ahol r a G konjugáltosztályainak száma és n_i az irreducibilis reprezentációk foka (vagyis az S_i egyszerű modulusok $\mathbb{C}$ feletti dimenziója), továbbá $|G| = \sum_{i=1}^r n_i^2$. A fejezet további részében reprezentáción mindig $\mathbb{C}$ feletti reprezentációt értünk. Habár az eredmények nagy része igaz olyan alebrailag zárt testek felett, amelyek karakterisztikája nem osztja a G csoport rendjét, az általánosság e szintjétől az egyszerűség kedvéért eltekintünk.

2.1. Karakterek, és alapvető tulajdonságaik

2.1. Definíció. Legyen $X : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ egy csoporthomomorfizmus. Ekkor az X-hez tartozó χ karakter a

$$\begin{aligned} \chi : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto \chi(g) = \mathrm{tr}\ X(g) \end{aligned}$$

2.2. Lemma. *Legyen $A, B : V \to V$ két lineáris leképezés. Ekkor* $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$. *Ha B invertálható is, akkor* $\mathrm{tr}\,(B^{-1}AB) = \mathrm{tr}\ A$. □

2.3. Következmény. *Ekvivalens reprezentációk karaktere ugyanaz és minden karakter osztályfüggvény, azaz ha χ karakter, akkor χ konstans a konjugáltosztályokon. Az $X : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ reprezentáció foka* $\dim_{\mathbb{C}} V = \chi(1) = \mathrm{tr}\ \mathrm{id}_V$.

2.4. Definíció. A G irreducibilis $X_1, \ldots, X_k$ reprezentációihoz tartozó $\chi_1, \ldots, \chi_r$ karaktereket a G irreducibilis karaktereinek nevezzük. A G irreucibilis karakterienek halmazát $\mathrm{Irr}\, G$-vel jelöljük.

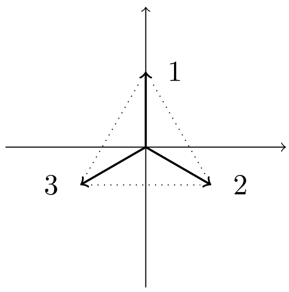
2.5. Megjegyzés. Vezessük be a G karakterein az alábbi két műveletet. $(\chi + \psi)(g) := \chi(g) + \psi(g)$ és $(\chi\psi)(g) := \chi(g)\psi(g)$. Könnyű meggondolni, hogy ezzel a definícióval $\chi + \psi$ és $\chi\psi$ is G-nek karakterei. Ugyanis, ha $X : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$, ill. $Y : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(W)$ a *chi*, ill. ψ-hez tartozó reprezentáció, akkor a $\chi + \psi$-nek az az $X \oplus Y : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V \oplus W)$ reprezentáció felel meg, amelyre $(X \oplus Y)(g) = X(g) \oplus Y(g)$, ill. $\chi\psi$-nek az az $X \otimes Y : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V \otimes W)$ reprezentáció felel meg, amelyre $(X \otimes Y)(g) = X(g) \otimes Y(g)$.

2.6. Példa. Határozzuk meg az $S_3 \cong D_3$ szimmetrikus csoport irreducibilis reprezentációit és karaktereit! Először próbáljuk meghatározni, hogy hány darab és milyen fokú irreducibilis karaktere van S_3-nak. Egyrészt $|S_3| = 6$, másrészt $S_3' = \langle(123)\rangle$, amiből azt kapjuk, hogy S_3-nak 2 darab lineáris karaktere és 1 darab 2 fokú karaktere van.

Az egyik lineáris karakter a triviális, amely minden csoportelemhez az 1-et rendeli. A másik lineáris karakter magja tartalmazza S_3'-t, de nem a teljes S_3, így megegyezik az S_3'-vel. A három darab transzpozíció egyikének a képe sem lehet az 1, mivel másodrendűek ezért a képe mindegyiknek a -1. A lineáris reprezentációk megegyeznek lineáris karaktereikkel, így a két lineáris reprezentáció karakterét is megkaptuk.

Mi lehet az S_3 másodfokú irreducibilis reprezentációja? Jelölje X a reprezentációt és χ a karakterét. Mielőtt megkonstruálnánk X-et, egy $\tilde{X}$ valós irreducibilis reprezentációját adjuk meg a csoportnak, aminek segítségével megkapjuk majd X-et.

Elég megadni $\tilde{X}$-et egy generátor halmazon. Vegyünk egy kétdimenziós valós vektorteret a standard bázisával. Rögzítsük a $v_1 = [0,1], v_2 = [\sqrt{3}/2, 1/2]$ és a $v_3 = -(v_1 + v_2)$ vektorokat.



Megadjuk $\tilde{X}$-et úgy, hogy az éppen a v_1, v_2, v_3 által meghatározott szabályos háromszög szimmetriáit adja meg. Tehát a $\tilde{X}$ ekkor az

$$1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad (123) \mapsto \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}; \qquad (23) \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

hozzárendelések által egyértelműen meghatározott homomorfizmus. Most legyen $X : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(W)$ az a komplex reprezentáció, amely egy g elemhez az $\tilde{X}(g)$ (mint komplex) mátrixot rendeli. Világos, hogy X egy csoporthomomorfizmus és W így egy irreducibilis $\mathbb{C}S_3$ modulus.

A χ karakter meghatározásához, elegendő χ-t az S_3 konjugáltosztályainak egy reprezentáns rendszerén kiértékelni. A szimmetrikus csoportban két elem pontosan akkor konjugált, ha azonos a diszjunkt ciklus szerkezetük. Tehát $\chi(1) = 1, \chi((23)) = 0$ és $\chi((123)) = -1$ egyértelműen megadja a karaktert.

2.7. Állítás. *Legyen X a G véges csoport egy tetszőleges $\mathbb{C}$ feletti reprezentációja, legyen χ az X-hez tartozó karakter. Ekkor tetszőleges $g \in G$-re az alábbi állítások igazak.*

1., $X(g)$ *diagonalizálható;*

2., $\chi(g)$ *egységgyökök összege, tehát algebrai egész;*

3., $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi}(g)$*;*

4., $\chi(g) = \chi(1) \Leftrightarrow X(g) = X(1)$, *vagyis* $g \in \ker X$*;*

5., $|\chi(g)| \leq \chi(1)$ *és ha egyenlőség teljesül, akkor* $g \ker X \in \mathrm{Z}(G/\ker X)$*;*

Bizonyítás.

1., A G csoport véges, ezért minden elemének rendje véges. Feltehetjük, hogy $g^m = 1$ és emiatt $X(g)^m = I$. Vagyis $X(g)$ minimálpolinomja osztja az $x^m - 1$ polinomot, amelynek $\mathbb{C}$-ben csupa különböző gyöke van, így $X(g)$ minimálpolinomjának is csupa különböző gyöke van, tehát diagonalizálható.

2., Az 1. pont alapján tudjuk, hogy $X(g)$ diagonalizálható, sőt azt is, hogy a diagonális elemek az $X(g)$ sajátértékei, amelyek minimálpolinomjának gyökei. Tehát, ha $g^m = 1$, akkor $X(g)$ sajátértékei m-edik egységgyökök, $\chi(g)$ pedig ezek összege.

3., Az $X(g)$ hasonló egy $\mathrm{diag}[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]$ diagonális mátrixhoz. (Persze $X(g)$ inverze ekkor hasonló ezen diagonális mátrix inverzéhez.) E diagonális mátrix inverze pedig $\mathrm{diag}[\varepsilon_1^{-1}, \ldots, \varepsilon_n^{-1}] = \mathrm{diag}[\overline{\varepsilon_1}, \ldots, \overline{\varepsilon_n}]$. Mivel a hasonló mátrixok nyoma megegyezik, így $\chi(g^{-1}) = \sum_i \overline{\varepsilon}_i = \overline{\chi(g)}$.

4., $\chi(g) = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$, ahol minden i-re $|\varepsilon_i| = 1$, így a háromszögegyenlőtlenség miatt $\chi(g)$ pontosan akkor egyezik meg $\chi(1) = n$-nel, ha minden i-re $\varepsilon_i = 1$, vagyis (a diagonalizálható) $X(g)$ minden sajátértéke 1. Ebből következik, hogy $X(g) = 1$, másképp $g \in \ker X$.

5., A háromszögegyenlőtlenség miatt elég az egyenlőségre vonatkozó állítást belátni. Tegyük fel, hogy $|\chi(g)| = |\chi(1)| = n$. Ekkor az összes ε_i meg kell, hogy egyezzen a háromszögegyenlőtlenség miatt. Azonban így $X(g)$ hasonló egy εI mátrixszal, amely nyilván centrális. Vagyis $X(g) \in \mathrm{Z}(\mathrm{im}\, X)$ másképp $g \ker X \in \mathrm{Z}(G/\ker X)$.

□

2.8. Definíció. Legyen X a G egy komplex reprezentációja, amelynek karaktere χ. A χ karakter magja $\ker\chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$, míg a χ karakter centruma $\mathrm{Z}(\chi) = \{g \in G \mid |\chi(g)| = |\chi(1)|\}$.

2.9. Megjegyzés. Azaz a 2.7. Tétel alapján $\ker\chi = \ker X$ és $\mathrm{Z}(\chi)$ pedig azokból az elemekből áll, amelyek X általi képe centrális $\mathrm{im}\, X$-ben.

2.10. Definíció. Legyen G egy tetszőleges csoport, ekkor G-nek a triviális karaktere

$$\begin{aligned} 1_G : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto 1; \end{aligned}$$

reguláris karaktere

$$\varrho = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)\chi.$$

2.11. Megjegyzés. A reguláris karakter az $\mathbb{C}G$ reguláris modulushoz tartozó karakter. Legyen $\mathbb{C}G = \oplus_{i=1}^{n} S_i^{n_i}$ a $\mathbb{C}G$ reguláris modulusának felbonthatatlan komponensekre való bontása. Ha az S_i modulushoz tartozó irreducibilis karakter χ_i, akkor $n_i = \chi_i(1)$.

Rögzítsük $\mathbb{C}G$-nek a G-beli elemek valamilyen sorbarendezésével kapott bázisát. Ezen a bázison G szigorúan tranzitívan hat, ezért ebben a bázisban a minden 1-től különböző g elemnek egy olyan $|G| \times |G|$ méretű permutációmátrix felel meg, amelynek főátlója csupa 0. Ezek nyoma 0. Tehát azt látjuk, hogy

$$\varrho(g) = \sum_{i=1}^{r} \chi_i(1)\chi_i(g) = \begin{cases} |G|, & \text{ha } g = 1; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

2.2. Ortogonalitási relációk

A G csoport irreducibilis karaktereit egy táblázatban célszerű ábrázolni. Ez a táblázat egy $k \times k$ méretű táblázat, amelynek oszlopai a csoport $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_k$ konjugálttosztályaival, sorai pedig a G irreducibilis $\chi_1, \ldots, \chi_k$ karaktereivel vannak indexelve. A táblázat i. sorának j. eleme pedig az i. irreducibilis karakter egy $\mathcal{K}_j$-ben lévő elemen felvett értéke.

2.12. Példa. Az S_3 karaktertáblája (ld. 2.6.):

	1	(12)	(123)
1_{S_3}	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Ahogy azt később látni fogjuk, egy csoport karaktertáblája sok hasznos információt tartalmaz a csoport szerkezetéről és általában igaz az, hogy egy csoport irreducibilis karaktereit könnyebb meghatározni, mint az irreducibilis karakterekhez tartozó reprezentációkat megkonstruálni. A karaktertábla kitöltésében kulcsfontosságúak az ún. ortogonalitási relációk.

Tekintsünk a G csoport egy $X : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ reprezentációját és a hozzá tartozó χ karaktert. Mind az X, mind a χ lineárisan kiterjeszthető a $\mathbb{C}G$ csoportalgebrára az $X\left(\sum_g a_g g\right) = \sum_g a_g X(g)$, illetve $\chi\left(\sum_g a_g g\right) = \sum_g a_g \chi(g)$ módon. Ezzel az X egy $\mathbb{C}G \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ algebrahomomorfizmus.

Legyen a $\mathbb{C}G$ csoportalgebra blokkokra bontása

$$\mathbb{C}G = \oplus_{i=1}^{r} R_i = \oplus_{i=1}^{r} e_i \mathbb{C}G,$$

ahol az e_i-k a csoportalgebra centrális ortogonális idempotensei. A továbbiakban az R_i-hez tartozó irreducibilis reprezentációt és karakterért jelölje rendre X_i és χ_i.

2.13. Tétel. *A bevezetett jelöllésekkel, tetszőleges $1 \le i \le r$ esetén*

$$e_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(1) \overline{\chi_i(g)} \cdot g.$$

Bizonyítás. Írjuk az e_i-t $e_i = \sum_g a_g g$ alakba. Az e_i az R_i blokk egységeleme és az összes (R_i-től különböző) R_j blokkot annulálja. Emiatt $X_i(e_i) = I_{n_i}$ és $X_j(e_i) = 0$, ha $i \neq j$. Számoljuk ki $\varrho(e_i g^{-1})$-t kétféleképpen! Egyrészt

$$\varrho(e_i g^{-1}) = \varrho\left(\sum_h a_h h g^{-1}\right) = \sum_h a_h \underbrace{\varrho(h g^{-1})}_{=\delta_{h,g}|G|} = a_g |G|,$$

másrészt

$$\varrho(e_i g^{-1}) = \sum_{j=1}^{k} \chi_j(1) \underbrace{\chi_j(e_i g^{-1})}_{\mathrm{tr}\ X_j(e_i) X_j(g^{-1})} = \chi_i(1)\chi_i(g^{-1}) = \chi_i(1)\overline{\chi_i(g)}.$$

Így $a_g|G| = \chi_i(1)\overline{\chi_i(g)}$. □

2.14. Tétel (Áltlánosított ortogonalitási reláció)**.** *A bevezetett jelöléseket megtartva, bármely $h \in G$ esetén*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(gh) \overline{\chi_j(g)} = \delta_{i,j} \frac{\chi_i(h)}{\chi_i(1)}. \tag{2}$$

Bizonyítás. Mivel e_i-k ortogonális idempotensek, ezért $e_ie_j = \delta_{i,j}e_i$. A 2.13. Tételt felhasználva kiszámoljuk az $e_ie_j \in \mathbb{C}G$ együtthatóit a G elemeiből álló bázisra vonatkozóan.

$$e_i = \frac{1}{|G|}\sum_{u\in G}\chi_i(1)\overline{\chi_i(u)}\cdot u; \quad e_j = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_j(1)\overline{\chi_j(g)}\cdot g.$$

Írjunk u helyére h^{-1}-et és használjuk, hogy $\chi_i(h^{-1}) = \overline{\chi_i(h)}$, akkor

$$e_i = \frac{1}{|G|}\sum_{h^{-1}\in G}\chi_i(1)\chi_i(h)\cdot h^{-1}. \tag{3}$$

Most az

$$e_ie_j = \frac{1}{|G|^2}\sum_{u,g\in G}\chi_i(1)\chi_j(1)\overline{\chi_i(u)}\,\overline{\chi_j(g)}ug$$

egyenletben az $ug = h^{-1}$ helyettesítéssel (vagy másképp az $u = h^{-1}g^{-1}$ helyettesítéssel) a h^{-1} együtthatója

$$\frac{1}{|G|^2}\sum_{g\in G}\chi_i(1)\chi_j(1)\overline{\chi_i(h^{-1}g^{-1})}\,\overline{\chi_j(g)} = \frac{1}{|G|^2}\sum_{g\in G}\chi_i(1)\chi_j(1)\chi_i(gh)\overline{\chi_j(g)}.$$

Használva, hogy $e_ie_j = \delta_{i,j}e_i$ és (3)-ben az e_i felírásából a h^{-1} együtthatóját leolvasva, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{|G|^2}\sum_{g\in G}\chi_i(1)\chi_j(1)\chi_i(gh)\overline{\chi_j(g)} = \delta_{i,j}\frac{1}{|G|}\chi_i(1)\chi_j(h),$$

amelyet rendezve

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(gh)\overline{\chi_j(g)} = \delta_{i,j}\frac{\chi_i(h)}{\chi_j(1)} = \delta_{i,j}\frac{\chi_i(h)}{\chi_i(1)},$$

vagyis (2) adódik. □

2.15. Tétel (I. Ortogonalitási reláció). *Az eddigi jelöléseket megtartva*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(gh)\overline{\chi_j(g)} = \delta_{i,j}. \tag{4}$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 2.14. Tételt a $h = 1$ választással. □

2.16. Tétel (II. Ortogonalitási reláció). *A korábbi jelöléseket használva, bármely $g, h \in G$ elemre*

$$\sum_{i=1}^{k}\chi_i(g)\overline{\chi_i(h)} = \begin{cases}|\mathrm{C}_G(g)|, & \text{ha } g \sim h;\\ 0 & \text{különben.}\end{cases} \tag{5}$$

Bizonyítás. Tekintsük a G karaktertábláját úgy mint egy $k \times k$ méretű mátrixot. Legyenek $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_k$ a konjugáltosztályok, és válasszunk egy $g_j \in \mathcal{K}_j$ reprezentáns rendszert. Az I. ortogonalitási reláció alapján

$$\delta_{i,j} = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \chi_i(gh)\overline{\chi_j(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{t=1}^{k} |\mathcal{K}_t|\chi_i(g_t)\overline{\chi_j(g_t)} =$$

$$= \sum_{t=1}^{k} \frac{|\mathcal{K}_t|}{|G|}\chi_i(g_t)\overline{\chi_j(g_t)} = \sum_{t=1}^{k} \frac{1}{|\mathrm{C}_G(g_t)|}\chi_i(g_t)\overline{\chi_j(g_t)} = \sum_{t=1}^{k} \frac{\chi_i(g_t)}{\sqrt{|\mathrm{C}_G(g_t)|}}\frac{\overline{\chi_j(g_t)}}{\sqrt{|\mathrm{C}_G(g_t)|}}.$$

Osszuk le a karaktertábla $\mathcal{K}_t$ konjugáltosztályhoz tartozó oszlopát $\sqrt{|\mathrm{C}_G(g_t)|}$-vel. Így egy ortogonális mátrixot kapunk, amelynek oszlopai ortonormált vektorok. Tehát

$$\sum_{t=1}^{k} \frac{\chi_i(g_t)}{\sqrt{|\mathrm{C}_G(g_t)|}}\frac{\overline{\chi_i(g_s)}}{\sqrt{|\mathrm{C}_G(g_s)|}} = \begin{cases} 1, & \text{ha } g_t \sim g_s; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

□

2.17. Példa. Az ortogonalitási relációk segítségével határozzuk meg a Q kvaternió-csoport karaktertábláját! Azt már tudjuk, hogy Q-nak 4 darab lineáris és 1 darab másodfokú irreducibilis karaktere van (1.26.). Legyenek $1_Q, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ a Q lineáris karakterei, χ_5 pedig a másodfokú karaktere. A lineáris karakterek megkaphatók úgy mint $Q/Q' \cong C_2 \times C_2$ karakterei, ezek a Q' által tartalmazott konjugáltosztályokon 1-et vesznek fel. Álljon a Q/Q' egy generátorrendszere az $\bar{i}$-vel, és $\bar{j}$-vel jelölt iQ' és a jQ' mellékosztályokból, vagyis $Q/Q' = \langle\bar{i}\rangle \times \langle\bar{j}\rangle$, ahol $\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = 1$ és $\bar{i}\bar{j} = \bar{k}$. Mivel Q/Q' összes lineáris reprezentációja (1) alakú, megkapjuk a Q lineáris karaktereinek $\{\pm i\}, \{\pm j\}, \{\pm k\}$ konjugáltosztályokon felvett értékeit. Tehát, amit eddig ismerünk a Q_4 karaktertáblájából, azt vázoljuk.

	1	-1	$\pm i$	$\pm j$	$\pm k$
1_Q	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1	1
χ_3	1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	-1	1	-1
χ_5	2				

A χ_5 értékeit pedig könnyedén megkapjuk már az I. ortogonalitási reláció alapján, hiszen az oszlopok (mint $\mathbb{C}$ feletti vektorok) ortogonálisak. Tehát a Q_4 karaktertáblája:

	1	-1	$\pm i$	$\pm j$	$\pm k$
1_Q	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1	1
χ_3	1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	-1	1	-1
χ_5	2	-2	0	0	0

2.18. Megjegyzés. Nagyon fontos megjegyezni itt, hogy a karaktertábla nem jellemzi a csoportot. Hogy ezt szemléltessük, tekintsük a D_4 diédercsoportot, azaz a négyzet szimmetriacsoportját. A D_4 egy 8-ad rendű csoport és kommutátor-részcsoportja másodrendű és $D_4/D_4' \cong C_2 \times C_2$. Vegyük észre, hogy a Q karaktertáblájának kitöltésekor – az I. ortogonalitási reláción túl – ugyanezeket a tulajdonságokat használtuk fel. Tehát a Q és a D_4 karaktertáblája meg kell, hogy egyezzen. Ennek ellenére $D_4 \not\cong Q$, hiszen D_4 tartalmaz 4-edrendű elemet, Q pedig nem.

Ez a jelenség általánosan is igaz. Minden p prím esetén létezik két egymással nem izomorf p^3 rendű nem kommutatív csoport, amelyek karaktertáblája megegyezik.

2.19. Definíció. A $\varphi : G \to \mathbb{C}$ leképezés egy osztályfüggvény, ha a G konjugáltosztályain konstans, azaz $\varphi(h^{-1}gh) = \varphi(g)$ minden $g, h \in G$ esetén.

Ha φ, ϑ osztályfüggvény, akkor legyen

$$[\varphi, \vartheta] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g)\overline{\vartheta(g)}.$$

2.20. Állítás. *A G csoporton értelmezett osztályfüggvények a pontonkénti műveletekkel és a $[\cdot,\cdot]$ művelettel egy komplex euklideszi teret alkotnak, amelynek ortonormált bázisát adja* $\operatorname{Irr} G$*.*

Bizonyítás. Az állítás első része egyszerű számolással igazolható. A második részhez használjuk, hogy $\operatorname{Irr} G$ egy ortonormált rendszer a II. ortogonalitási reláció miatt és $|\operatorname{Irr} G|$ megegyezik a G konjugáltosztályainak, és így a G-n értelmezett osztályfüggvények terének dimenziójával. □

2.21. Állítás. *Tegyük fel, hogy φ a G csoport egy osztályfüggvénye, ψ a G egy tetszőleges karaktere. Legyen $\operatorname{Irr} G = \{\chi_1, \dots, \chi_n\}$. Ekkor*

1., a φ pontosan akkor karakter, ha $\forall i : [\varphi, \chi_i] \in \mathbb{N}$;

2., a χ pontosan akkor irreducibilis, ha $[\chi, \chi] = 1$.

Bizonyítás. Ha φ karakter, akkor irreducibilis karakterek összege. Fordítva, ha a $[\varphi, \chi_i] = a_i$ nem negatív egész minden i-re, akkor $\varphi = \sum a_i \chi_i$ a $\oplus_i a_i X$ reprezentáció karaktere.

Ha ψ irreducibilis karakter, akkor a II. ortogonalitási tétel alapján $[\psi, \psi] = 1$. A megfordításhoz használjuk az 1. pont eredményét. Mivel ψ egy karakter, ezért $\psi = \sum_i a_i \chi_i$ valamely $a_i \in \mathbb{N}$ nem mind 0 egésszel. Akkor

$$[\psi, \psi] = \sum_i a_i^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists! k : a_j = \delta_{k,j}.$$

□

2.22. Tétel. *Legyen G egy tetszőleges véges csoport, amelynek X és Y két tetszőleges komplex karaktere, χ, ψ karakterekkel. Az X és az Y pontosan akkor egyezik meg, ha karaktereik megegyeznek.*

Bizonyítás. Azt már beláttuk, hogy ekvivalens reprezentációk karakterei megegyeznek. A megfordításhoz tegyük fel, hogy $\chi = \psi$. Minden komplex reprezentáció felbontható irreducibilis reprezentációk összegére, ezért minden komplex karakter felbontható irreducibilis karakterek összegére. Tehát

$$\chi = \sum_{\varphi_i \in \operatorname{Irr} G} a_i \varphi_i = \sum_{\varphi_i \in \operatorname{Irr} G} b_i \varphi_i = \psi,$$

ahol a_i, b_j nem negatív egészek. Bármely i index esetén $a_i = [\varphi_i, \chi] = [\varphi_i, \psi] = b_i$. Amiből $X \sim \sum_i a_i X_i \sim Y$. □

2.23. Állítás. *Legyen G egy tetszőleges csoport és legyen $N \triangleleft G$ egy normális részcsoportja. Ekkor kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető az* $\operatorname{Irr} G/N$ *és a* $\{\chi \in \operatorname{Irr} G \mid N \leq \ker \chi\}$ *halmazok között.*

Bizonyítás. Minden olyan $X : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ reprezentáció, amelyre $N \leq \ker X$, egyértelműen faktorizálható a $G \to G/N$ természetes homomorfizmuson keresztül. Azaz adódik egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés az $X : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ és az $\tilde{X} : G/N \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ reprezentációk között.

Ez a megfeleltetés irreducibilis reprezentációknak irreducibilis reprezentációt feleltet meg, hiszen $\operatorname{im} X = \operatorname{im} \tilde{X}$ és a G, ill. G/N csoportok hatása V-n csak a az X, ill. $\tilde{X}$ általi képüktől függ. □

2.24. Következmény. *Tetszőleges G csoport tetszőleges $N \triangleleft G$ normális részcsoportja esetén*

$$N = \bigcap_{\substack{N \leq \ker \chi \\ \chi \in \operatorname{Irr} G}} \ker \chi, \quad \textit{speciálisan} \quad \bigcap_{\chi \in \operatorname{Irr} G} \ker \chi = 1.$$

2.25. Megjegyzés. Foglaljuk össze, hogy milyen információkat lehet leolvasni a G csoport karaktertáblájából!

- a csoport számát, konjugáltosztályainak számát, azok méretét;
- normálosztókat: a $g_1, \ldots, g_t$ által generált normálosztóra

$$\langle g_1, \ldots, g_t \rangle^G = \bigcap_{\chi(g_i) = \chi(1) \chi \in \operatorname{Irr} G} .$$

  A normálosztók méretét is megkapjuk, hiszen ezek konjugáltosztályok uniói, sőt a faktorcsoport karaktertábláját is leolvashatjuk az eredeti karaktertábláról.
- A G egyszerűsége eldönthető a normálosztóinak vizsgálatából;
- feloldhatóság: ha találunk egy prímhatványrendű normálosztót, amelynek faktora feloldható, akkor G feloldható. Prímhatványrendű normálosztó létezése eldönthető a karaktertábláról, és induktívan a faktorcsoport feloldhatósága is így ellenőrizhető. Fordítva is iga, ha G feloldható, akkor tartalmaz prímhatványrendű normálosztót, mert speciálisan tartalmaz egy A Abel–féle normálosztót, amelynek egy P Sylow–részcsoportja karakterisztikus, ezért $P \triangleleft G$.
- G nilpotenciáját is vizsgálhatjuk, hiszen a G pontosan akkor nilpotens, ha minden Sylow–részcsoportja normális, ezt pedig eldönthető a karaktertábla alapján.
- A csoport centrumát megkapjuk mint az egyelemű konjugáltosztályok uniója, kommutátor-részcsoportját pedig mint a lineáris karakterek magjainak metszete.
- Ha minden konjugáltosztály 1-elemű, azaz ha G Abel, akkor a csoport visszaállítható a karaktertáblájának ismeretében.

Amit viszont általában nem tudunk leolvasni a karaktertábláról, hogy G milyen rendű elemeket tartalmaz, G-nek milyen részcsoportjai vannak és így (ahogy azt láttuk is) a csoportot nem határozza meg a karaktertáblája.

3. Permutációs karakterek, a szimmetrikus csoport reprezentációelmélete

Az S_n (n-elemű Ω_n alaphalmazon ható bijekciók) szimmetrikus csoportja irreducibilis komplex reprezentációinak leírásához meg kell keresnünk az $A = \mathbb{C}S_n$ csoportalgebra minimális jobb ideáljait. Ez elég, mert minden irreducibilis A-modulus a reguláris A_A modulusnak egy alkalmas faktora, és A féligegyszerűsége miatt A_A minden faktora izomorf egy megfelelő részmodulusával. A minimális A-modulusok pedig nyilván éppen az egyszerű A-modulusok.

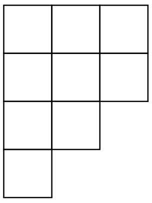
Azt már tudjuk, hogy hány darab (egymással nem ekivalens) komplex reprezentációt kell kapnunk. Éppen annyit, amennyi S_n konjugáltosztályainak száma. Erről ismert, hogy megegyezik az n lehetséges paríciióinak számával, hiszen két permutáció pontosan akkor konjugált S_n-ben, ha diszjunkt ciklus felírásuk azonos ciklus szerkezetű. A stratégia tehát az, hogy az n mindenegyes partíciójához keresünk egy minimális jobbmodulust A_A-ban, majd ezekről megemutatjuk, hogy egymással páronként nem izomorfak.

3.1. Young–táblák és szimmetrizátoraik

Vezessük be a lexikografikus rendezést az n természetes szám partícióin. Tehát, ha $n = n_1 + \ldots + n_k = n'_1 + \ldots + n'_h$, ahol $n_1 \geq \ldots \geq n_k \geq 0$ és $n'_1 \geq \ldots \geq n'_h \geq 0$, akkor

$$\{n_1, \ldots, n_k\} \succ \{n'_1, \ldots, n'_h\},$$

ha i az első index, ahol n_i és n'_i eltér és ezekre $n_i > n'_i$. Az $\{n_1, \ldots, n_k\}$ partícióihoz rendeljünk egy ún. Young–táblát, amelynek n cellája van úgy, hogy az i. sorában n_i darab cella van $(1 \geq i \geq n)$. Például, ha $n = 9$, akkor a $\{3, 3, 2, 1\}$ partícióhoz tartozó táblázat



Egy n-cellájú Young–táblát töltsünk ki az $\{1, \ldots, n\}$ elemekkel úgy, hogy minden cellába kerüljön elem, de mindegyikbe különböző. Az így kitöltött táblákat *diagram*oknak fogjuk hívni. Például az előző esetben

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 \\ \cline{1-2} 9 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \text{vagy} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 4 & 8 & 9 \\ \hline 2 & 6 \\ \cline{1-2} 7 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

két, ugyanahhoz a Young–táblához tartozó diagram.

Legyen adva egy fix D diagram. Ekkor a D-n az S_n elemei hassanak úgy, hogy a cellák tartalmát a kijelölt módon permutálják (de a cellák maradjanak helyben). Vagyis az S_n permutációi egy rögzített típusú Young–tábla diagramjait permutálja. Ha D rögzített, akkor a D-hez definiáljuk az $R(D) \leq S_n$, illetve $C(D) \leq S_n$ részcsoportokat mint a D sorait, illetve D oszlopait helyben hagyó permutációk részcsoportjai. Tehát, ha $\pi \in R(D)$ akkor π egy $k \in \Omega_n$ elemet csak a vele megegyező sor celláinak valamelyikébe mozgathatja. Hasonlóan, ha $\sigma \in C(D)$, akkor $(k)\sigma$ a k oszlopában van. Például, ha

$$D = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad \text{akkor} \quad R(D) = \{1, (13), (25), (13)(25)\}.$$

Az $R(D)$ és $C(D)$ részcsoportok definíciójából tisztán látszik, hogy $R(D) \cap C(D) = 1$, hiszen a metszetben lévő permutációk a diagram elemeit nem mozdítják el sem a sorukból, sem az oszlopukból.

3.1. Definíció. Legyen D egy rögzített n-cellájú diagram. Ekkor a D-hez tartozó Young–szimmetrizátor

$$e(D) = \sum_{\substack{\pi \in R(D) \\ \sigma \in C(D)}} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\pi \in A, \tag{6}$$

ahol $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$, ha σ páros, -1, ha σ páratlan permutáció.

3.2. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az $e(D)$-t definiáló lineáris kombinációban π végigfut az összes $R(D)$-beli elemen és σ végigfut az összes $C(D)$-beli csoportelemen. Más-más π-t, illetve σ-t választva ezek a tagok különböznek, hiszen ha $\sigma_1\pi_1 = \sigma_2\pi_2$, akkor $\sigma_2^{-1}\sigma_1 = \pi_2\pi_1^{-1} \in C(D) \cap R(D)$, amiből $\pi_1 = \pi_2$, illetve $\sigma_1 = \sigma_2$ következik. Vagyis azt mondhatjuk, hogy az $e(D)$ csoportelemek előjeles összege. (Azaz csoportelemek olyan lineáris kombinációja, amelyben minden elem együtthatója 0 vagy ±1.)

Legyen $\pi' \in R(D)$ és $\sigma' \in C(D)$ és tekintsük az $e(D)$ (6) szerinti kifejtését. Akkor

$$\begin{aligned} \sigma' e(D) &= \sum_{\substack{\pi \in R(D) \\ \sigma \in C(D)}} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma'\sigma\pi = \operatorname{sgn}(\sigma')e(D) \\ e(D)\pi' &= \sum_{\substack{\pi \in R(D) \\ \sigma \in C(D)}} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\pi\pi' = e(D), \end{aligned} \tag{7}$$

hiszen $\sigma'\sigma$ is végigfut $C(D)$ elemein, illetve $\pi\pi'$ is végigfut $R(D)$ elemein, másrészt $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}\sigma'\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma')\operatorname{sgn}(\sigma'\sigma)$.

A cél megmutanti, hogy $e(D)A$ minimális jobb ideál minden D diagram esetén. Illetve, hogy $e(D)A \cong e(D')A$ pontosan akkor, ha a D és a D' diagramokhoz tartozó Young–táblák megegyeznek.

3.2. Az S_n irreducibilis reprezentációi

3.3. Lemma. *Legyen D egy n cellából álló diagram, $g, h \in S_n$. Jelölje D' a Dg diagramot és jelölje H azt a cellatranszformációt, amely a D diagramot a Dh diagramba viszi. (Azaz H megadja, hogy a $D \mapsto Dh$ hatás során egy cella tartalma mely cellába kerül át.) Ekkor a H hatása a D' diagramon megegyezik a $g^{-1}hg$ permutáció hatásával, vagyis $(D')H = Dg^{-1}hg$.*

Bizonyítás. Legyen α a D' diagram (i,j) pozíciójában. Keressük azt a szimbólumot, amely α helyére kerül a H hatására. Tegyük fel, hogy a D diagram (i,j) pozíciójában a β szimbólum állt, azaz $\beta.g = \alpha$, vagy másképp $\beta = \alpha.g^{-1}$. Legyen $\kappa = \beta.h$ és tegyük fel, hogy a κ szimbólum a D diagram az (i',j') cellájában van, vagyis a H transzformáció az (i',j') cellát az (i,j) cellába viszi. Elég leolvasni a D' diagram (i',j') cellájának tartalmát, ami pedig nem más, mint $\kappa.g$. Tehát a H az α helyére a $\kappa.g = \beta.hg = \alpha.g^{-1}hg$ elemet írja. $\square$

3.4. Példa. Tegyük fel, hogy $g = (135), h = (132)(45) \in S_5$ és így $g^{-1}hg = (14)(235)$. Legyen D az alábbi diagram.

$$\begin{tikzcd}
D = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & D' = Dg = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \arrow[d, "H"'] \\
Dh = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \arrow[r, "g"] & Dg^{-1}hg = \begin{array}{|c|c|}\hline 5 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}
\end{tikzcd}$$

3.5. Következmény. *Bármely $g \in S_n$ elemre $R(Dg) = g^{-1}R(D)g$ és $C(Dg) = g^{-1}C(D)g$.*

Bizonyítás. Ha $\pi \in R(D)$, akkor π a D diagram minden sorát helybenhagyja. A 3.3. Lemma szerint $g^{-1}\pi g$ a Dg sorait hagyja helyben. Ezáltal $\pi \in R(D)$ akkor és csak akkor, ha bármely $g \in G$ esetén $g^{-1}\pi g \in R(Dg)$. Ugyanígy indokolható az oszlopokra vonatkozó állítás is. $\square$

3.6. Állítás. *Tegyük fel, hogy D egy n cellából álló diagram. Jelölje A a $\mathbb{C}S_n$ csoportalgebrát és $e(D)$ legyen (6) alatt definiált eleme A-nak. Ekkor, ha D' egy olyan diagram, amelynek Young–táblája megegyezik D Young–táblájával, akkor $e(D)A \cong e(D')A$.*

Bizonyítás. Ha D és D' Young–táblája azonos, akkor található olyan $g \in S_n$ permutáció, amellyel $D' = Dg$. Ezáltal

$$e(D')A = e(Dg)A = g^{-1}e(D)gA = g^{-1}e(D)A,$$

vagyis az

$$\begin{aligned} e(D')A &\longrightarrow e(D)A \\ x &\longmapsto g^{-1}x \end{aligned}$$

modulus-homomorfizmus szürjektív és nyilván invertálható, tehát izomorfizmus. $\square$

3.7. Lemma. *Rögzítsünk egy n cellából álló D diagramot. A $g \in S_n$ elem pontosan akkor írható fel $g = \sigma\pi$ alakba úgy, hogy $\sigma \in C(D)$ és $\pi \in R(D)$, ha D-ben semelyik két azonos sorban lévő elem nem kerül azonos oszlopba a Dg-ben.*

Bizonyítás. Az egyik irányhoz tegyük fel, hogy $g = \sigma\pi$. Akkor, ha α, β szimbólum a D ugyanazon sorában van, akkor $D\pi$-ben a két elem szintén ugyanabban a sorban (és így biztosan különböző oszlopban) szerepel. De $Dg = D\pi(\pi^{-1}\sigma\pi)$ és $\pi^{-1}\sigma\pi \in C(D\pi)$ (3.5. miatt), ami miatt α és β a Dg-ben is különböző oszlopban lesz.

A megfordításhoz tegyük fel, hogy bármely két, a D-ben egy sorban lévő, elem a Dg-ben különböző oszlopba kerül. Ekkor persze a Dg-ben azonos oszlopban szereplő párok a D-ben szükségképpen különböző sorban vannak. Speciálisan a Dg első oszlopának elemei a D-ben mind különböző sorban vannak. Emiatt létezik olyan $\pi_1 \in R(D)$, amely ezeket az elemeket mind az első oszlopba küldi. Most tekintsük a Dg második oszlopát. Ennek elemei a $D\pi_1$ különböző soraiban szerepelnek. Tehát találhatunk olyan $\pi_2 \in R(D\pi_1)$ permutációt, amely ezeket az elemeket a második oszlopba viszi úgy, hogy az első oszlopot fixen hagyja. Az eljárást folytatva kapunk egy olyan $\pi \in R(D)$ elemet, amelyre teljesül, hogy a $D\pi$ diagramban minden elem oszlopa ugyanaz, mint Dg-ben. Tehát létezik egy olyan $\sigma' \in C(D\pi)$, amellyel $D\pi\sigma' = Dg$. Ám ekkor $\sigma' = \pi^{-1}\sigma\pi$ valamely $\sigma \in C(D)$ elemmel és így $Dg = D\pi\pi^{-1}\sigma\pi = D\sigma\pi$, amit akartunk. □

3.8. Lemma. *Tegyük fel, hogy a D és a D' diagramokhoz tartozó Young–táblák különböznek úgy, hogy a D-hez tartozó $\{n_1, \ldots, n_k\}$ és a D'-höz tartozó $\{n'_1, \ldots, n'_h\}$ partíciókra $\{n_1, \ldots, n_k\} \succ \{n'_1, \ldots, n'_h\}$ teljesül. Ekkor $e(D)e(D') = 0$.*

Bizonyítás. Először is megmutatjuk, hogy létezik olyan szimbólum pár, amely a D diagramban azonos sorban, a D'-ben azonos oszlopban helyezkedik el. Indirekt tegyük fel, hogy nem így van. Ekkor a D diagram első oszlopában szereplő n_1 elem, a D'-ben mind különböző oszlopban van. Emiatt $n'_1 \geq n_1$ és így szükségképpen $n_1 = n'_1$. Folytassuk a gondolatmenetet a többi sorra. Az indirekt feltevésünkből arra jutunk, hogy $\{n_1, \ldots, n_k\} \not\succ \{n'_1, \ldots, n'_h\}$, ami ellentmond a lemma feltételeinek.

Tehát létezik olyan α, β szimbólum, hogy azok D-ben egy sorban, D'-ben egy oszlopban vannak. Legyen $\tau = (\alpha\beta)$. Akkor $\tau \in C(D')$ és $\tau \in R(D)$. Ekkor (7) alapján

$$e(D)e(D') = e(D)\tau\tau e(D') = e(D)\mathrm{sgn}(\tau)e(D') = -e(D)e(D'),$$

amiből $e(D)e(D') = 0$. □

A (7) azonosságai alapján látjuk, hogy tetszőleges $\pi \in R(D)$ és $\sigma \in C(D)$ elemek esetén, ha $\lambda \in \mathbb{C}$, akkor

$$\sigma\lambda e(D)\pi = (\lambda\mathrm{sgn}(\sigma))e(D).$$

A következőekben megmutatjuk, hogy ez a tulajdonság jellemzi is az $e(D)$ elemeket.

3.9. Állítás. *Tegyük fel, hogy az $x \in A = \mathbb{C}S_n$ elemre teljesül, hogy tetszőleges $\pi \in R(D)$ és $\sigma \in C(D)$ elemek esetén $\sigma x\pi = \mathrm{sgn}(\sigma)x$, akkor létezik olyan D diagram és λ komplex szám, hogy $x = \lambda e(D)$.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy n cellából álló D diagramot. Tegyük fel, hogy az $x = \sum_{g\in S_n} \alpha_g g \in A$ elemre teljesülnek lemma feltételei. Akkor tetszőleges $\pi \in R(D)$ és $\sigma \in C(D)$ elemekre

$$x = \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma^{-1}x\pi^{-1} = \mathrm{sgn}(\sigma)\sum_{g\in S_n}\alpha_g(\sigma^{-1}g\pi^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\sum_{h\in S_n}\alpha_{\sigma h\pi}h.$$

Vagyis $\alpha_g = \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_{\sigma g \pi}$ minden $\pi \in R(D), \sigma \in C(D)$ esetén. Speciálisan, ha $g = 1$, akkor $\alpha_1 \operatorname{sgn}(\sigma) = \alpha_{\sigma\pi}$.

Tegyük fel, hogy $g \in S_n$ nem áll elő $\sigma\pi$ alakban. Belátjuk, hogy ekkor $\alpha_g = 0$, ami az eddig tett észrevételeink miatt igazolja a lemma állítását. Ha $g \neq \sigma\pi$, akkor létezik olyan α, β szimbólumok, amelyek D-ben azonos sorban, Dg-ben azonos oszlopban szerepelnek. Legyen $\tau = (\alpha\beta)$. Ekkor $\tau \in R(D)$ és $\tau \in C(Dg)$. Ez utóbbi miatt $\tau = g^{-1}\tau' g$, valamely $\tau' \in C(D)$ alkalmasan választott elemmel. Speciálisan τ' is egy transzpozíció és $\alpha_g = \operatorname{sgn}(\tau')\alpha_{\tau g \tau^{-1}} = -1 \cdot \alpha_g$. Így $\alpha_g = 0$. □

3.10. Állítás. *Bármely D diagram esetén az $e(D)$ egy kvázi-idempotens elem, azaz $e(D)e(D) = \lambda e(D)$ valamely $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ skalárra.*

Bizonyítás. A (7) azonosságok alapján bármely $\pi \in R(D)$ és $\sigma \in C(D)$ elemek esetén $\sigma e(D)e(D)\pi = \operatorname{sgn}(\sigma)e(D)e(D)$. A 3.9. Állítás szerint van olyan $\lambda \in \mathcal{C}$, amelyre $e(D)^2 = \lambda e(D)$. Meg kell mutatni, hogy $\lambda \neq 0$.

Az előző lemma bizonyításában az is kiderült, hogy λ nem más, mint az $e(D)^2$ kifejtésében az $1 \in S_n$ együtthatója. Tegyük fel, hogy $\Phi : A \to A$ az a lineáris leképezés, amelyre $(x)\Phi = e(D)x$. Rögzítsük az A egy $\{g_i \mid 1 \leq i \leq n!\}$ bázisát úgy, hogy minden bázis elem egy S_n-beli csoportelemnek feleljen meg és tegyük fel, hogy $g_1 = 1$. Ekkor, ha $e(D) = \sum \alpha_i g_i$, akkor

$$\begin{aligned} e(D)g_1 &= \alpha_1 g_1 \ + \dots \\ e(D)g_2 &= *** \ + \alpha_1 g_2 + \dots \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

ami alapján $\operatorname{tr} \Phi = n!\alpha_1$. Kiszámoljuk $\operatorname{tr} \Phi$ értékét más bázisra vonatkozóan is, és mivel a nyom bázisfüggetlen, ezért így is $n!\alpha_1$-et kell kapnunk.

Az új bázishoz először is vegyük fel $e(D)A$ egy $\mathbb{C}$-bázisát, legyen ez $\{v_1, \dots, v_f\}$, ahol $\dim_{\mathbb{C}} Ae(D) = f$. Egészítsük ki ezt A egy bázisává alkalmas $\{v_{f+1}, \dots, v_{n!}\}$ elemekkel. Vegyük észre, hogy $e(D)v_i$ kifejtésében csak $\{v_1, \dots, v_f\}$ báziselemek szerepelhetnek nem 0 együtthatóval, hiszen $e(D)v_i \in e(D)A$. Továbbá, ha létezik egy jól meghatározott $\lambda \in \mathbb{C}$, hogy bármely $x \in e(D)A$ esetén $xe(D) = \lambda x$ (ld. 3.10.). Így

$$\begin{aligned} v_1 e(D) &= \lambda v_1 \\ v_2 e(D) &= \quad \lambda v_2 \\ &\ \ \vdots \\ v_f e(D) &= \qquad\qquad \lambda v_f \\ v_{f+1} e(D) &= * \ + \ \dots \ + * \ + 0 + \ \dots \ + \ 0 \\ &\ \ \vdots \\ v_{n!} e(D) &= * \ + \ \dots \ + * \ + 0 + \ \dots \ + \ 0, \end{aligned}$$

amiből $\operatorname{tr} \Phi = \lambda f$. Tehát $\lambda f = \alpha_1 n!$. Az $e(D)$ kifejtésében az $1 \in S_n$ együtthatója $\alpha_1 = 1$, így $\lambda = n!/f \neq 0$. □

3.11. Állítás. *Tegyük fel, hogy D egy n cellából álló diagram. Ekkor $e(D)A$ egy minimális jobb modulusa az $A = \mathbb{C}S_n$ csoportalgebrának.*

Bizonyítás. Jelölje $\lambda \in \mathbb{C}$ azt a skalárt, amellyel $e(D)^2 = \lambda e(D)$. Válasszuk u-t a $\lambda^{-1}e(D)$ elemnek, így $u^2 = u \neq 0$ egy olyan idempotens elem, amelyre $uA = e(D)A$. Megmutatjuk, hogy uA egyszerű modulus. Mivel A féligegyszerű ezért uA pontosan akkor egyszerű, ha $\mathrm{Hom}_A(uA, uA) \cong uAu \cong \mathbb{C}$.

Legyen $x \in uAu$, vagyis akkor írhatjuk, hogy $x = e(D)ye(D)$ valamilyen $y \in A$ alkalmas elemmel. Ekkor viszont bármely $\pi \in R(D)$ és $\sigma \in C(D)$ elemekkel

$$\sigma x \pi = \sigma e(D)ye(D)\pi = \mathrm{sgn}\sigma e(D)ye(D) = \mathrm{sgn}(\sigma)x,$$

amiből a 7. Állítás miatt x az $e(D)$ egy μ skalárszorosa. Vagyis azt kaptuk, hogy $uAu = \{\mu u \mid \mu \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}$. □

3.12. Állítás. *Tegyük fel, hogy D és D' két olyan n cellából álló diagram, amelyekhez tartozó Young–táblák különbözőek. Ekkor $e(D)A \ncong e(D')$.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy a D-hez tartozó $\{n_1, \ldots, n_k\}$ és a D'-höz tartozó $\{n'_1, \ldots, n'_h\}$ partíciókra $\{n_1, \ldots, n_k\} \succ \{n'_1, \ldots, n'_h\}$ áll fenn. Legyen uA a D-hez és $u'A$ a D'-höz tartozó minimális jobb ideál és tegyük fel, hogy az u, u' idempotens elemek. Indirekt tegyük föl, hogy $uA \cong u'A$. Ekkor létezik olyan $a \in A$ elem, hogy az

$$\begin{aligned} uA &\longmapsto u'A \\ x &\longmapsto ax \end{aligned}$$

egy modulusizomorfizmus. Másképp, létezik olyan $b \in A$, hogy $u' = aub$. Viszont u idempotens, tehát

$$u' = u'^2 = (aub)u'.$$

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $g \in S_n$ esetén $ugu' = 0$, ami ellentmondás. Ehhez $ugu' = u(gu'g^{-1})g$ viszont $u(gu'g^{-1}) = 0$ a 3.8. Lemma miatt, hiszen u' az $e(D)$ és $gu'g^{-1}$ az $e(Dg)$ egy skalárszorosa. □

3.13. Tétel. *Legyen n egy természetes szám. Ekkor az n összes $\{n_1, \ldots, n_k\}$ partíciójához egyértelműen létezik egy Young–tábla. Minden Young–táblához tartozik diagramok egy halmaza. Egy D diagram meghatározza az S_n szimmetrikus csoport egy $R(D)$ és egy $C(D)$ részcsoportját; $R(D)$ a D sorait fixenhagyó permutációk és $C(D)$ oszlopait fixenhagyó permutációk részcsoportja. Legyen*

$$e(D) = \sum_{\substack{\pi \in R(D) \\ \sigma \in C(D)}} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma\pi.$$

Ekkor $e(D)A$ egy minimális jobbideál az $A = \mathbb{C}S_n$ csoportalgebrában és így egy egyszerű modulus. Fordítva, az A összes egyszerű modulusa izomorf valamely alkalmas $e(D)A$ modulussal. Továbbá, az azonos Young–táblákhoz tartozó diagramokból származó egyszerű modulusok izomorfak, a különbözőekből származók nem.

3.3. Permutációs karakterek

Tegyük fel, hogy egy G csoport hat az n elemű $\Omega_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ alaphalmazon. Ehhez a csoporthatáshoz kapcsolható egy X reprezentáció. Legyen V egy K feletti vektortér, amelynek báziselemeit feleltessük meg Ω_n elemeinek. Azaz $V = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ és a báziselemeken G az indexeik permutációjával hat. Ekkor az X

reprezentáció karaktere az a χ, amelyre $\chi(g) = |\operatorname{Fix}(g)| = |\{b_i \in V \mid b_1.g = b_i\}|$. Ezt a karaktert a $G \curvearrowright \Omega_n$ csoporthatáshoz tartozó permutációs karakternek nevezzük.

A fejezet eddigi részében sikerült meghatároznunk az S_n szimmetrikus csoport irreducibilis reprezentációit. Most szeretnénk meghatározni az irreducibilis reprezentációkhoz tartozó karaktereket is. Ezt az egyes reprezentációkhoz tartozó permutációs karakterek meghatározásával tesszük.

A lexikografikus rendezés segítségével rendezzük sorba az n cellából álló Young–táblákat, a legnagyobbal kezdve. Legyen T a sorrendben j. partícióhoz tartozó Young–tábla. A T-hez tartozó diagramokon vezessünk be egy $\sim$ relációt. Legyen $D \sim D'$, ha létezik olyan $\pi \in R(D)$, hogy $D\pi = D'$. Tehát két diagram akkor lesz $\sim$ relációban, ha azok sorainak tartalma megegyezik esetleg csak a szimbólumok sorrendje tér el a megfelelő sorokban. Világos, hogy $\sim$ egy ekvivalenciareláció. Jelölje $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_t$ a $\sim$ osztályait. Az S_n hat az így kapott partícióhalmazokon is. A hatáshoz tartozó permutációs karakter legyen φ_j.

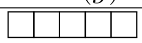
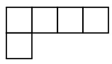
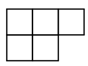
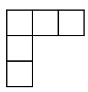
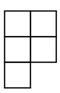
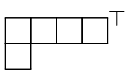
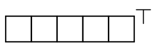
3.14. Tétel. *Legyen n egy természetes szám. Az n partícióihoz tartozó Young–táblákat rendezzük a lexikografikus rendezés szerint, a legnagyobbal kezdve. Ekkor a j. táblának megfelelő irreducibilis karakter*

$$\chi_j = \varphi_j - \sum_{\ell=1}^{j-1} [\chi_\ell, \varphi_j] \chi_\ell, \tag{8}$$

ahol φ_j a j. táblához rendelt permutációs karakter. □

3.15. Következmény. *Az S_n karaktertáblájában csak egész számok szerepelnek.*

3.16. Példa. Írjuk fel az S_5 karaktertábláját! Először is írjuk fel a partíciókhoz tartozó permutációs karaktereket, tehát számoljuk meg, hogy az egyes konjugáltosztályok elemei hány darab $\mathcal{D}_i$ osztályt hagynak fixen. (A helytakarékosság kedvéért az utolsó két Young–táblát az első két tábla transzponáltjaként írtuk fel.)

Fix (g)	1	(..)(..)	(...)	(.....)	(...)(..)	(....)	(..)
	1	1	1	1	1	1	1
	5	1	2	0	0	1	3
	10	2	1	0	1	0	4
	20	0	2	0	0	0	3
	30	2	0	0	0	0	6
	60	0	0	0	0	0	6
	120	0	0	0	0	0	0

Alkalmazva (8) formuláját azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \varphi_1; \\
\chi_2 &= \varphi_2 - \chi_1; \\
\chi_3 &= \varphi_3 - \chi_2 - \chi_3; \\
\chi_4 &= \varphi_4 - \chi_1 - 2\chi_2 - \chi_3; \\
\chi_5 &= \varphi_5 - \chi_1 - 2\chi_2 - 2\chi_2 - \chi_4; \\
\chi_6 &= \varphi_6 - \chi_1 - 3\chi_2 - 3\chi_3 - 3\chi_4 - 2\chi_5; \\
\chi_7 &= \varphi_7 - \varphi_1 - 4\chi_2 - 5\chi_3 - 6\chi_4 - 5\chi_5 - 4\chi_6,
\end{aligned}$$

és az S_5 karaktertáblája

Fix (g)	1	(..)(..)	(...)	(.....)	(...)(..)	(....)	(..)
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	4	0	1	-1	-1	0	2
χ_3	5	1	-1	0	1	-1	1
χ_4	6	-2	0	1	0	0	0
χ_5	5	1	-1	0	-1	1	-1
χ_6	4	0	1	-1	1	0	-2
χ_7	1	1	1	1	-1	-1	-1

Vegyük észre, hogy ha két Young–tábla egymás transzponáltja, akkor a nekik megfelelő irreducibilis karakterek egymás alternáló karakterszeresei.

4. Indukált karakterek és alkalmazásaik

Ha H a G csoport egy részcsoportja, χ pedig egy karaktere a G-nek, akkor a χ (mint $G \to \mathbb{C}$ függvény) H-ra való χ_H megszorítása a H-nak egy karaktere. Valóban, ha $X : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ az a reprezentáció, amelyhez a χ karakter tartozik, akkor az $X|_H : H \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ a H-nak egy reprezentációja, amelynek megfelelő karakter éppen χ_H. Sőt azt is látjuk, hogy ha $\chi \in \mathrm{Irr}\, G$, akkor $\chi_H \in \mathrm{Irr}\, H$. (Az viszont általában nem igaz, hogy ha χ egy olyan karaktere G-nek, amelyre $\chi_H \in \mathrm{Irr}\, H$, akkor χ egy irreducibilis karakter.)

Ebben a fejezetben egy olyan konstrukciót vizsgálunk, amely tekinthető a karakterek megszorításának ellentett műveleteként. Azaz adott $H \leq G$ részcsoport karaktereihez konstruálunk G-n értelmezett karaktereket. Az eljárás nagyban segít, ha olyan csoport karaktertábláját kívánjuk felírni, amely részcsoportja(i) karakterei már ismertek. Ezen felül egy csoportelméleti alkalmazást is mutatunk.

4.1. Osztályfüggvények indukálása

4.1. Definíció. Tegyük fel, hogy $H \leq G$ egy részcsoport és φ egy H-n értelmezett osztályfüggvény. Ekkor a φ-nek a G-re vett indukáltja

$$\varphi^G = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \varphi^\circ(xgx^{-1}), \quad \text{ahol} \quad \varphi^\circ = \begin{cases} \varphi(y), & \text{ha } y \in H; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

4.2. Lemma. *Legyen φ a $H \leq G$ részcsoport egy osztályfüggvénye. Ekkor φ^G osztályfüggvénye G-nek is.*

Bizonyítás. Ha $y, g \in G$ tetszőleges elemek, akkor

$$\varphi^G(y^{-1}gy) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\varphi^\circ(xy^{-1}gyx^{-1}) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\varphi^\circ((xy^{-1})g(xy^{-1})^{-1}) = \varphi^G(g),$$

hiszen ha x végigfut G elemein, akkor bármely rögzített $y \in G$ esetén az xy^{-1} is végigfut G összes elemén. $\square$

Legyen φ osztályfüggvény a $H \leq G$ részcsoporton, a φ^G-t többféleképpen is kiszámíthatjuk. Először is legyen $\{t_1, \ldots, t_r\}$ a H szerinti mellékosztályok egy teljes reprezentánsrendszere. Ekkor

$$\varphi^G(g) = \sum_{i=1}^{r}\varphi^\circ(t_igt_i^{-1}). \tag{9}$$

Ehhez elég észrevenni, hogy $\varphi^\circ(t_igt_i^{-1}) = \varphi^\circ(ht_igt_i^{-1}h^{-1})$ bármely $h \in H$ esetén, hiszen egy tetszőleges $x \in G$ pontosan akkor H-beli, ha bármely $h \in H$ esetén hxh^{-1} is H-beli. Tehát, ha $t_igt_i^{-1} \notin H$, akkor $\varphi^\circ(t_igt_i^{-1}) = \varphi^\circ(ht_igt_i^{-1}h^{-1}) = 0$, különben pedig a $ht_igt_i^{-1}h^{-1}$ egy H-beli konjugáltja, ezért a φ° (H-n értelmezett) osztályfüggvény ugyanazt az értéket veszi fel $t_igt_i^{-1} \notin H$ és $ht_igt_i^{-1}h^{-1}$ elemeken.

Jelölje $\mathcal{K}_G(g)$ a g elem G-beli konjugáltosztályát, továbbá $H \cap \mathcal{K}_G(g)$ álljon az $\{x_i \mid i \in I\}$ elemekből. Egy x_i elem H-beli konjugáltosztálya legyen $\mathcal{K}_H(x_i)$ és válasszuk $\{y_j \mid j \in J\}$ elemeket úgy, hogy a $H \cap \mathcal{K}_G(g)$ elemeinek H-szerinti konjugáltosztályainak egy reprezentánsrendszerét kapjuk. Ekkor

$$\varphi^G(g) = |G : H|\sum_{j\in J}\frac{|\mathcal{K}_H(x_i)|}{|\mathcal{K}_G(g)|}\varphi(y_j). \tag{10}$$

Egy rögzített x_i-re $|\{x \in G \mid xgx^{-1} = x_i\} = |\mathrm{C}_G(g)|$, így

$$\varphi^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\varphi^\circ(xgx^{-1}) = \frac{1}{|H|}\sum_{i\in I}|\mathrm{C}_G(g)|\underbrace{\varphi^\circ(x_i)}_{\varphi(x_i)} =$$

$$= \frac{1}{|H|}\sum_{j\in J}|\mathrm{C}_G(g)||\mathcal{K}_H(x_i)|\varphi(y_j) = \frac{1}{|H|}\sum_{j\in J}\frac{|G|}{|\mathcal{K}_G(g)|}|\mathcal{K}_H(x_i)|\varphi(y_j),$$

amit akartunk.

4.3. Tétel (Frobenius–reciprocitási tétel)**.** *Tegyük fel, hogy φ egy osztályfüggvény a H-n, ϑ egy osztályfüggvény a G-n és $H \leq G$. Ekkor*

$$\left[\varphi^G, \vartheta\right] = [\varphi, \vartheta_H] \tag{11}$$

Bizonyítás. Egyszerű számolással.

$$[\varphi^G,\vartheta]=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi^G(g)\overline{\vartheta(g)}=\frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{\substack{g\in G\\x\in G}}\varphi^\circ(xgx^{-1})\overline{\vartheta(g)}=$$

$$=\frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{\substack{g\in G\\x\in G}}\varphi^\circ(xgx^{-1})\overline{\vartheta(xgx^{-1})}=\frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\left(\sum_{g\in G}\varphi^\circ(xgx^{-1})\overline{\vartheta(xgx^{-1})}\right)=$$

$$=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\left(\frac{1}{|H|}\sum_{y\in G}\varphi^\circ(y)\overline{\vartheta(y)}\right)=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\underbrace{\left(\frac{1}{|H|}\sum_{y\in H}\varphi(y)\overline{\vartheta(y)}\right)}_{[\varphi,\vartheta_H]}=$$

$$=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}[\varphi,\vartheta_H]=[\varphi,\vartheta_H].$$

□

4.4. Következmény. *Ha φ egy karaktere a $H\le G$ részcsoportnak, akkor φ^G karaktere G-nek.*

Bizonyítás. Bármely $\chi\in\operatorname{Irr}G$-re

$$[\varphi^G,\chi]=[\varphi,\chi_H]\ge 0 \text{ egész szám},$$

a 2.21. Állítás miatt φ^G a G egy karaktere. □

4.2. Indukált karakterek egy alkalmazása

4.5. Definíció. Legyen G egy permutációcsoport, azaz $G\le S_\Omega$, ahol Ω egy véges halmaz. Azt mondjuk, hogy G tranzitív (vagy tranzitívan hat az Ω-n), ha bármely $\alpha,\beta\in\Omega$ pár esetén létezik olyan $g\in G$, hogy $g:\alpha\to\beta$.

A G permutációcsoport reguláris (vagy másképp szigorúan 1-tranzitív), ha bármely $1\ne g$-re $|\operatorname{Fix}(g)|$ (azaz g fixpontjainak száma) 0, vagy ami ezzel ekvivalens bármely α,β párra pontosan 1 olyan $g\in G$ létezik, amellyel $g:\alpha\to\beta$.

4.6. Definíció. A G egy Frobenius–permutációcsoport, ha tranzitív és minden $1\ne g\in G$ elemnek legfeljebb 1 fixpontja van.

Egy tetszőleges G csoport absztrakt Frobenius–csoport, ha létezik olyan $H\le G$ részcsoportja, hogy minden $x\in G\setminus H$ elem esetén $H^x=x^{-1}Hx\cap H=1$. Az ilyen H részcsoport neve Frobenius–komplementum.

4.7. Állítás. *Minden reguláris Frobenius–permutációcsoport absztrakt Frobenius–csoport is. Fordítva, minden absztrakt Frobenius–csoport beágyazható alkalmas szimmetrikus csoportba Frobenius–permutációcsoportként.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy G egy Frobenius–permutációcsoport. Legyen $H\le G$ az $\omega\in\Omega$ elem G_ω stabilizátora. Ha $x\in G\setminus G_\omega$, akkor $x^{-1}G_\omega x=G_{\omega x}\cap G=1$, különben lenne olyan $1\ne g\in G$ elem, amelynek fixpontja az ω és az $\omega x(\ne\omega)$ is.

A megfordításhoz legyen $H\le G$ egy Frobenius–komplementum. Vegyük észre, hogy ha $H^x\cap H=1$ minden $x\notin H$-ra, akkor ha $1\ne H^x\cap H^y$, akkor $H^{xy^{-1}}\cap H\ne 1$ vagyis $xy^{-1}\in H$, tehát $x\in Hy$, másképp $Hx=Hy$. Tekintsük a H mellékosztályain való hatást. Vagyis G tranzitívan hat az $\Omega = \{Hx \mid x \in G\}$ halmazon. Ha g stabilizálja Hx-et, akkor $Hxg = Hx$, vagyis $xgx^{-1} \in H$, másképp $g \in H^x$. Az észrevételünk miatt g-nek semelyik másik Hy mellékosztály sem lehet fixpontja. Így létezik egy olyan $\varphi : G \to S_\Omega$ csoporthomomorfizmus, amelynek képe egy olyan tranzitív permutációcsoport, amelyben minden 1-től különböző elem legfeljebb 1 pontot hagy fixen. A φ injektív is, hiszen $g \in \ker \varphi$, akkor és csak akkor, h g minden mellékosztályt fixenhagy. $\square$

4.8. Lemma. *Legyen H a G csoport egy Frobenius–komplementuma. Ha ϑ egy olyan osztályfüggvény a H-n, amelyre $\vartheta(1) = 0$, akkor $(\vartheta^G)_H = \vartheta$.*

Bizonyítás. Először is, ha $\vartheta(1) = 0$, akkor (10) szerint $(\vartheta^G)(1) = |G : H|\vartheta(1) = 0$. Másodszor, ha $1 \neq h \in H$, akkor

$$(\vartheta^G)(1) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\vartheta^\circ(\underbrace{xhx^{-1}}_{\notin H,\text{ ha } x\notin H}) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in H}\underbrace{\vartheta^\circ(xhx^{-1})}_{=\vartheta(h)} = \frac{1}{|H|}|H|\cdot\vartheta(h).$$

$\square$

4.9. Definíció. Egy tetszőleges G csoport ϑ osztályfüggvényét a G gey általánosított karaterének nevezzük, ha ϑ két karakter különbsége.

4.10. Tétel. *Legyen G egy Frobenius–permutációcsoport. Legyen $\mathcal{N} \subseteq G$ a következő $\mathcal{N} = \{g \in G \mid |\operatorname{Fix}(g)| = 0\} \cup \{1\}$. Ekkor $\mathcal{N} \lhd G$.*

Másképp, ha G egy absztrakt Frobenius–csoport, akkor

$$\mathcal{N} = \left(G \setminus \bigcup_{x\in G} H^x\right) \cup \{1\} \lhd G.$$

Bizonyítás. Az $\mathcal{N}$ konjugálásra zárt, ezért elég megmutatni, hogy $\mathcal{N}$ részcsoport. Ehhez belátjuk, hogy bármely $\varphi \in \operatorname{Irr} H \setminus \{1_H\}$ esetén található olyan $\varphi^* \in \operatorname{Irr} G$, amelyre

1., $(\varphi^*_H) = \varphi$, valamint

2., $\mathcal{N} \subseteq \ker \varphi^*$.

Amennyiben léteznek ilyen φ^* irreducibilis karakterek, úgy az $M = \bigcap_{\varphi\in\operatorname{Irr} H\setminus\{1_H\}} \varphi^*$ egy normálosztója G-nek. Továbbá

$$H \cap M = \bigcap_{\varphi\in\operatorname{Irr} H\setminus\{1_H\}} H \cap \ker\varphi^* \overset{1.,}{=} \bigcap_{\varphi\in\operatorname{Irr} H\setminus\{1_H\}} \ker\varphi = \bigcap_{\varphi\in\operatorname{Irr} H\setminus} \ker\varphi = 1,$$

sőt $H^x \cap M = H^x \cap M^x = (H \cap M)^x = 1$. Ebből az következik, hogy $M \subseteq \mathcal{N}$, de másrészt a 2. pont miatt $\mathcal{N} \subseteq M$, vagyis $\mathcal{N} = M \lhd G$.

Elsődleges célunk, hogy megkonstruáljuk a φ^* irreducibilis karaktereket. Legyen $\varphi \in \operatorname{Irr} H \setminus \{1_H\}$, definiáljuk ϑ osztályfüggvényt mint $\vartheta = \varphi - \varphi(1)1_H$ általánosított karaktert. Világos, hogy $\vartheta(1) = 0$. A 4.4. Állítás alapján ϑ^G is általánosított karakter. Keressük meg ϑ^G-nek $\operatorname{Irr} G$-beli elemekkel való kifejtését! Először is

$$[\vartheta^G, 1_G] = [\vartheta, (1_G)_H] = [\vartheta, 1_H] = [\varphi, 1_H] - \varphi(1)[1_H, 1_H] = -\varphi(1),$$

amiből pedig $\vartheta^G = \varphi^* - \varphi(1)1_G$, ahol valamely φ^* karakterre, amelyre speciálisan $[\varphi^*, 1_G] = 0$. Ezt felhasználva számoljuk ki $[\vartheta^G, \vartheta^G]$ értékét kétféleképpen. Egyrészt a ϑ definíciója alapján

$$[\vartheta^G, \vartheta^G] \overset{(11)}{=} [\vartheta, (\vartheta^G)_H] \overset{4.8.}{=} [\vartheta, \vartheta] = [\varphi - \varphi(1)1_H, \varphi - \varphi(1)1_H] = \\ = [\varphi, \varphi] + \varphi(1)^2[1_H, 1_H] = 1 + \varphi(1)^2, \quad (12)$$

másrészt a $\vartheta^G = \varphi^* - \varphi(1)1_G$ felírást használva

$$[\vartheta^G, \vartheta^G] = [\varphi^* - \varphi(1)1_G, \varphi^* - \varphi(1)1_G] = [\varphi^*, \varphi^*] + \varphi(1)^2. \quad (13)$$

Most (12) és (13) egyenleteket összevetve, $[\varphi^*, \varphi^*] = 1$ adódik. Tudjuk még, hogy φ^* szintén általánosított karakter, mert átalánosított karakterek összege. Emiatt $\varphi^* = \sum_{\chi_i \in \operatorname{Irr} G} a_i \chi_i$, ahol az a_i-k most egész számokat jelölnek. Ám $\sum_i a_i^2 = 1$, ami alapján φ^* vagy $-\varphi^*$ egy irreducibilis karaktere G-nek. Ennek eldöntéséhez φ^*-ot kiértékelve az $1 \in G$-n,

$$\varphi^*(1) = \vartheta^G(1) + \varphi(1) = \varphi(1) > 0$$

adódik, ami szerint φ^* egy irreducibilis karakter.

Valóban ez az a φ^*, amit kerestünk, hiszen

$$(\varphi^*)_H = (\vartheta^G)_H + \varphi(1)(1_G)_H = \vartheta + \varphi(1)1_H = \varphi.$$

Ezen felül a 2. pont is teljesül, mert véve egy tetszőleges $1 \neq g$ elemét G-nek, a feltételek szerint $xgx^{-1} \notin H$, és így az indukált ϑ^G karakter g-n szükségképpen 0. Emiatt $\varphi^*(g) = \vartheta^G(g) + \varphi(1)1_G(g) = \varphi(1) = \varphi^*(1)$, tehát $g \in \ker \varphi^*$. □

4.11. Példa. Az A_4 alternáló csoportban a fixpont mentes elemek azok, amelyek két diszjunkt transzpozíció szorzataként előállnak. Vagyis A_4-ben normális részcsoport a $V = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ negyedrendű csoport.

4.3. Indukált reprezentációk

A Frobenius–reciprocitási tétel következményeként észrevettük, hogy egy G csoport tetszőleges részcsoportjának karakterét a G-re indukálva a G-nek egy karakteréhez jutunk. Tehát biztosan található olyan reprezentációja G-nek, amelyhez tartozó karakter indukált. Szeretnénk megkonstruálni magát a reprezentációt (ill. a reprezentációhoz tartozó modulust) is az indukált karakteren kívül.

4.12. Definíció. Tegyük fel, hogy $X : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ egy reprezentáció, azaz V egy $\mathbb{C}G$-modulus. Legyenek $W_1, \dots, W_k$ olyan alterei a V-nek, amelyeket az $X(g)$ endomorfizmusok tranzitív módon egymásbapermutál. Ekkor azt mondjuk, hogy a $V = W_1 + \ldots + W_k$ a V modulus egy imprimitív felbontása.

Ha V egy irreducibilis modulus és nincs valódi imprimitív felbontása, akkor V egy primitív $\mathbb{C}G$-modulus.

Vegyük észre, hogy ha $V = W_1 + \ldots + W_k$ a V modulusnak egy imprimitív felbontása, akkor W_i-k sosem lesznek $\mathbb{C}G$-részmodulusok. Ebben az esetben legyen $H = \{g \in G \mid (W_1)X(g) = W_1\}$. Ezzel H egy részcsoportja G-nek és W_1 egy $\mathbb{C}H$-részmodulusa V-nek mint $\mathbb{C}H$-modulus.

4.13. Állítás. *Legyen $X : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ egy reprezentáció és tegyük fel, hogy a $V = W_1 + \ldots + W_k$ a V-nek egy imprimitív felbontása. Legyen H a W_1 stabilizátora, azaz $H = \{g \in G \mid (W_1)X(g) = W_1\}$. Ekkor, ha χ az X karaktere, és ϑ a W_1 (mint $\mathbb{C}H$-modulus) karaktere, akkor $\vartheta^G = \chi$.*

Bizonyítás. Legyen $T = \{t_1, \ldots, t_k\}$ a $H \leq G$ részcsoport jobb oldali mellékosztályaihoz tartozó reprezentánsrendszer és legyen $W = W_1$. Ekkor minden $1 \leq i \leq k$ esetén $(W)X(t_i) = W_i$ és

$$V = \sum_{i=1}^{k} (W)X(t_i).$$

Legyen a W egy bázisa $w_1, \ldots, w_m$. Ezzel $\{w_j X(t_i) \mid 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq k\}$ a V egy bázisát adja. Erre a bázisra vonatkozóan kiszámítjuk $\chi(g)$ értékét.

Egy rögzített $t \in T$ elemre a $(w_i)X(t)X(g)$ csak akkor lesz a $(w_i)X(t)$ skalárszorosa, ha $(W)X(tg) = W(t)$, azaz ha $tgt^{-1} \in H$. Ebben az esetben tegyük fel, hogy $h = tgt^{-1}$ és ekkor léteznek olyan $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ elemek, amelyekkel $(w_i)X(t)X(g) = (w_i)X(h)X(t) = \sum_{i,j} a_{i,j}(w_j)X(t)$. Azaz a $(w_i)X(t)$ ekkor az $X(g)$ nyomához $a_{i,i}$-t ad. Így egy rögzítet $t \in T$ esetén a $(w_i)X(t)$ báziselemek hozzájárulása éppen $\vartheta(tgt^{-1})$. A T-beli elemekre ezt összevonva

$$\chi(g) = \sum_{t \in T} \vartheta^{\circ}(tgt^{-1}) = \vartheta^G(g).$$

□

Azt már látjuk tehát, hogy ha az $X : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ reprezentációhoz tartozó V modulus rendelkezik imprimitív felbontással, akkor a felbontás által meghatározott részcsoport, illetve a részcsoporthoz tartozó reprezentáció indukáltja az eredeti X reprezentációval megegyező karakterrel rendelkezik. Ebből az is következik, hogy az így indukált reprezentáció ekvivalens az eredeti X-szel (ld. 2.22.).

A kérdés most az, hogy egy adott $H \leq G$ részcsoport és $Y : H \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(W)$ esetén hogyan találhatunk olyan V modulusát $\mathbb{C}G$-nek, amely rendelkezik egy olyan imprimitív felbontással, amely mentén van olyan komponens, amely W-vel izomorf és amelynek stabilizátora éppen a H. Ha ilyet találunk, akkor az előző állítást erre a szituációra alkalmazzuk, megkapjuk az Y indukáltját G-re.

4.14. Tétel. *Tegyük fel, hogy a H a G egy tetszőleges részcsoportja és legyen $Y : H \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(W)$ egy reprezentáció. Ekkor létezik olyan $X : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ reprezentáció, hogy $V = \sum W_i$, ahol H a W_1 stabilizátora és $W \cong W_1$ mint $\mathbb{C}H$-modulus.*

Bizonyítás. Legyen V a W-nek mint vektortérnek $|G : H|$ példányú direkt összege. Legyen T a $H \leq G$ jobbolodali mellékosztályainak egy reprezentánsrendszere, amelyről feltesszük, hogy tartalmazza a csoport egységét. Vezessük be az alábbi jelölést. Ha $t \in T$, akkor jelöljön $W \otimes t$ egy V-beli olyan alteret úgy, hogy $W \otimes t$ izomorf W-vel és $\sum_{t \in T} W \otimes t = V$. Minden $t \in T$ esetén rögzítsünk egy $\alpha_t : W \to W \otimes t$ izomorfizmust és jelölje $w \otimes t$ a $w \in W$ vektor α_t általi képét, vagyis $W \otimes t = \{w \otimes t \mid w \in W\}$.

Most definiálunk egy (jobb oldali) G-hatást a $w \otimes t$ elemeken. Először is, ha $g \in G$, akkor g egyértelműen írható ht alakba egy megfelelő $t \in T$ választásával. A $w \otimes g$-t ekkor definiáljuk úgy mint $(w)X(h) \otimes t$, amit az egyszerűség kedvéért írjunk röviden $w.h \otimes t$-nek. Vegyük észre, hogy ezzel, ha $x \in H$, akkor $w.x \otimes g = w \otimes xg$.

Ezek után definiáljuk a $g \in G$ egy $w \otimes t$ elemen való hatását mint $(w \otimes t).g = (w \otimes t)X(g) = w \otimes (tg)$. Így tetszőleges g_1, g_2 esetén $(w \otimes g_1).g_2 = w \otimes (g_1 g_2)$.

Ezt a hatást lineárisan kiterjesztve V-n egy $\mathbb{C}G$-modulus struktúra adódik és nyilván teljesül, hogy

$$V = \sum_{t \in T} W \otimes t,$$

amelyről látjuk, hogy egy imprimitív felbontása V-nek. Továbbá a $W \otimes 1$ altér stabilizátora a H és $W \cong W \otimes 1$ a konstrukciónk szerint. □

4.15. Megjegyzés. Az előző tétel bizonyításában mutatott konstrukció valójában a V-t a

$$V = W \otimes_{\mathbb{C}H} \mathbb{C}G$$

modulusok tenzorszorzataként állítja elő.

Rögzítsünk egy $Y : H \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(W)$ reprezentációt, amely megadja W-nek a $\mathbb{C}H$-modulus struktúráját. Az Y karakterét jelölje ϑ. Legyen a W-nek egy bázisa $\{w_j \mid j \in J\}$ és a H részcsoport egy a jobb oldali mellékosztályaihoz tartozó reprezentánsrendszere $T = \{t_i \mid i \in I\}$. A V-nek ekkor egy bázisát adják a $\{w_j \otimes t_i \mid j \in J, i \in I\}$ alakú elemi tenzorok. Ezen a bázison a G csoport a

$$(w_j \otimes t_i).g = w_j \otimes t_i g t_k^{-1} t_k = w_j.(t_i g t_k^{-1})$$

módon hat, ahol t_k^{-1} olyan, hogy a $t_i g t_k^{-1}$ egy H-beli csoportelem. Erre a bázisra könnyen kiszámítható a hatáshoz tartozó reprezentáció karaktere. A g-hatás mátrixában a $w_j \otimes t_i$ báziselemhez tartozó diagonális csak akkor 0-tól különböző, ha $t_k = t_i$. Ebben az esetben látjuk, hogy egyrészt $t_i g t_i^{-1} \in H$, másrészt azt, hogy a $w_j \otimes t_i$-hez tartozó diagonális elem értéke ugyanaz, mint az $Y(t_i g t_i^{-1})$ mátrixában a w_j-hez tartozó diagonális elem. Ha egy rögzített t_i-re ezeket a hozzájárulásokat összegezzük, akkor éppen $\vartheta(t_i g t_i^{-1})$ adódik. Így

$$\chi(g) = \sum_{i \in I} \vartheta^{\circ}(t_i g t_i^{-1}) = \vartheta^G(g)$$

5. Normálosztók (konjugált) karakterei

5.1. Konjugált osztályfüggvények, konjugált karakterek

5.1. Definíció. Tekintsünk egy σ automorfizmusát G-nek és egy tetszőleges G-n értelmezett ϑ osztályfüggvényt. Ekkor legyen ϑ^σ a

$$\begin{aligned} \vartheta^\sigma : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto \vartheta(g^{\sigma^{-1}}) \end{aligned}$$

módon értelmezett függvény.

5.2. Lemma. *Legyen ϑ, φ a G csoport osztályfüggvényei, σ, π pedig* $\mathrm{Aut}\, G$ *tetszőleges elemei. Ekkor az alábbi állítások teljesülnek.*

1., A ϑ^σ szintén osztályfüggvény.

2., Ha ϑ egy karakter, akkor ϑ^σ is egy karakter.

3., $[\vartheta^\sigma, \varphi^\sigma] = [\vartheta, \varphi]$.

4., Ha ϑ *egy irreducibilis karakter, akkor* ϑ^σ *is egy irreducibilis karakter.*

5., $\vartheta^{\sigma\pi} = (\vartheta^\sigma)^\pi$.

Bizonyítás.

1., Bármely $x \in G$ esetén $\vartheta^\sigma(x^{-1}gx) = \vartheta\left((x^{-1}gx)^\sigma\right) = \vartheta\left((x^{-1})^{\sigma^{-1}} g^{\sigma^{-1}} x^{\sigma^{-1}}\right)$, ám ϑ osztályfüggvény, ezért $\vartheta\left((x^{-1})^{\sigma^{-1}} g^{\sigma^{-1}} x^{\sigma^{-1}}\right)$ megegyezik $\vartheta(g^{\sigma^{-1}}) = \vartheta^\sigma(g)$-vel.

2., Legyen $X : G \to \mathrm{GL}_K(V)$ egy reprezentáció, amelyhez tartozó karakter ϑ. Ekkor $X^\sigma := X(g^{\sigma^{-1}})$ módon értelmezett $G \to \mathrm{GL}_K(V)$ leképezés szintén egy reprezentáció, hiszen két csoporthomomorfizmus kompozíciója. Az X^σ-hoz tartozó karakter ϑ^σ.

3., Az osztályfüggvényeken értelmezett $[\cdot, \cdot]$ művelet definíciója alapján

$$[\vartheta^\sigma, \varphi^\sigma] = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \vartheta^\sigma(g)\overline{\varphi^\sigma(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \vartheta(g^{\sigma^{-1}})\overline{\varphi(g^{\sigma^{-1}})},$$

és ha g végigfut a G összes elemén, akkor $g^{\sigma^{-1}}$ szintén, emiatt az egyenlőséglánc jobb oldala $[\vartheta, \varphi]$-vel egyezik meg.

4., A 2. és 3. pont következménye, mert ha ϑ egy irreducibilis karakter, akkor egyrészt ϑ^σ karakter és $[\vartheta^\sigma, \vartheta^\sigma] = [\vartheta, \vartheta] = 1$.

5., Egy tetszőleges $g \in G$ elemre

$$\vartheta^{\sigma\pi}(g) = \vartheta(g^{\sigma\pi^{-1}}) = \vartheta(g^{\pi^{-1}\sigma^{-1}}) = \vartheta^\sigma(g^{\pi^{-1}}) = (\vartheta^\sigma)^\pi(g).$$

□

5.3. Példa. Legyen $G = C_2 \times C_2$, és a G két generátora a, b, vagyis $G = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, illetve $G = \{1, a, b, c = ab\}$. Akkor G karatertáblája az alábbi.

	1	a	b	c
1_G	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	1
χ_3	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1

A G egy automorfizmusa az $\{a, b, c\}$ halmaz egy tetszőleges permutációjának feleltethető meg. Ha például $\sigma = (bc)$, akkor látható, hogy $\chi_2^\sigma = \chi_3$ és $\chi_3^\sigma = \chi_2$, a másik két karakter pedig σ-ra invariáns, hiszen a $\{b, c\}$ halmazon 1_G és χ_4 konstans.

5.4. Definíció. Tegyük fel, hogy a H a G-nek egy normálosztója és legyen ϑ egy H-n értelmezett osztályfüggvény. Tetszőleges $g \in G$ esetén a ϑ^g függvényt értelmezzük úgy mint

$$\vartheta^g(x) := \vartheta(gxg^{-1}), \quad \text{minden } x \in H \text{ esetén.}$$

A ϑ^g-t a ϑ konjugált osztályfüggvényének nevezzük.

Mivel $H \lhd G$, ezért egy g elemmel való konjugálás a H-nak egy automorfizmusa, így a konjugált osztályfüggvény egy speciális esete az 5.1. Definíció szerinti konstrukciónak.

5.5. Lemma. *Ha a H a G-nek egy normális részcsoportja, a φ egy osztályfüggvény H-n, a χ pedig egy osztályfüggvény G-n, akkor bármely $g \in G$ esetén*

1., $(\chi_H)^g = \chi_H$ *és*

2., $[\chi_H, \varphi^g] = [\chi_H, \varphi]$.

Bizonyítás. Az 1. állításhoz használjuk fel, hogy $H \triangleleft G$, ami miatt $gxg^{-1} \in H$ minden $g \in G$-re, illetve azt, hogy χ egy osztályfüggvény. Tehát

$$\chi_H^g(x) = \chi_H(gxg^{-1}) = \chi(gxg^{-1}) = \chi(x).$$

A 2. állításhoz használjuk fel az 1. állítást, illetve az 5.2. Lemma 3. pontját. Ezekből

$$[\chi_H, \varphi^g] = [\chi_H^g, \varphi^g] = [\chi_H, \varphi].$$

□

5.6. Megjegyzés. Legyen $H \triangleleft G$. Bontsuk fel $\operatorname{Irr} H$-t a G-beli elemekkel való konjugálásra invariáns részhalmazokra. Egy ilyen részhalmazt az $\operatorname{Irr} H$ (G-re vonatkozó) konjugáltosztályának nevezünk.

Az előző Lemma 2. állításának következménye, hogy ha $\chi \in \operatorname{Irr} G$, akkor a χ_H irreducibilis H-karaterek szerinti kanonikus felbontásában az azonos konjugáltosztályokból származó karaterek együtthatója ugyanaz.

5.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy a H a G egy normális részcsoportja és legyen $\varphi \in \operatorname{Irr} H$. Ekkor $\varphi^G|_{G \setminus H} = 0$ és*

$$(\varphi^G)_H = e \cdot \sum_{i=1}^{t} \varphi_i,$$

ahol $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_t\}$ a φ összes $\operatorname{Irr} H$-beli G szerinti konjugáltja. Ezen felül $e = |G : H|/t$ egy pozitív egész.

Bizonyítás. Mivel H normális részcsoport, ezért bármely $x, g \in G$ esetén xgx^{-1} pontosan akkor H-beli, ha $g \in H$. Így $\varphi^\circ(xgx^{-1}) = 0$ a $G \setminus H$ összes g elemén.

Az állítás második részéhez vegyünk egy tetszőleges h elemét H-nak. Erre

$$\varphi^G(h) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \varphi^\circ(xhx^{-1}) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \varphi(xhx^{-1}) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \varphi^x(h),$$

amiből $(\varphi^G)_H = 1/|H| \sum_{x \in G} \varphi^x$. Ha φ irreducibilis, akkor φ^x is irreducibilis, tehát ez az előállítás a kanonikus előállítása $(\varphi^G)_H$-nak. Emiatt a $(\varphi^G)_H$ kanonikus előállításában $\operatorname{Irr} H$ egy rögzített konjugáltosztályának elemei szerepelnek. Az előző megjegyzésünk szerint pedig a megfelelő osztály mindenegyes tagja ugyanolyan együtthatóval szerepel. Így írhatjuk, hogy

$$(\varphi^G)_H = e \sum_{i=1}^{t} \varphi_i. \tag{14}$$

Az e meghatározásához (14) mindkét oldalát kiértékeljük a csoport egységén. Azt kapjuk, hogy $(\varphi^G)_H(1) = \varphi^G(1) = |G : H|\varphi(1)$, ami a jobb oldal miatt megegyezik $e \cdot t\varphi(1)$-gyel. Ez éppen az, amit akartunk. □

5.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy $H \lhd G$. Legyen $\chi \in \operatorname{Irr} G$ és $\varphi \in \operatorname{Irr} H$ olyan, hogy $[\chi_H, \varphi] > 0$. Jelölje $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_t\}$ a φ összes konjugáltját. Ekkor*

$$\chi_H = e \cdot \sum_{i=1}^{t} \varphi_i, \quad \textit{ahol} \;\; e = [\chi_H, \varphi].$$

Bizonyítás. Az 5.8. Tétel alapján $(\varphi^G)_H = e' \cdot \sum_{i=1}^{t} \varphi_i$. Másrészt a Frobenius–reciprocitás miatt $0 < [\varphi, \chi_H] = [\varphi^G, \chi]$. Mivel χ irreducibilis, ezért összeadandója a φ^G-nek. Így persze χ_H szintén összeadandója $(\varphi^G)_H$-nak, amelynek irreducibilis felbontásában csak a φ_i karakterek szerepelnek. Tehát χ_H irreducibilis felbontásában is csak φ_i karakterek szerepelhetnek, mégpedig mindnyájan $e = [\varphi, \chi_H]$ együtthatóval. □

5.9. Példa. Tekintsünk a $G = S_4$ szimmetrikus csoportot. A G-nek a $V = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ normális részcsoportja, amely izomorf a $C_2 \times C_2$ csoporttal. A G karaktertáblája:

S_4	1	(..)(..)	(...)	(..)	(....)
1_G	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	2	2	-1	0	0
χ_4	3	-1	0	1	-1
χ_5	3	-1	0	-1	1

A V első két oszlop elemeiből áll. Vizsgáljuk meg, hogy az egyes irreducibilis karakterek V-re való megszorítása milyen kanonikus felbontással rendelkezik. Emlékeztetőül a $V \cong C_2 \times C_2$ irreducibilis karakterei, illetve az S_4 irreducibilis karaktereinek V-re vett megszorítottjai az alábbiak.

	1	a	b	c
1_V	1	1	1	1
φ_2	1	-1	-1	1
φ_3	1	-1	1	-1
φ_4	1	1	-1	-1
$(1_G)_V$	1	1	1	1
$(\chi_2)_V$	1	1	1	1
$(\chi_3)_V$	2	2	2	2
$(\chi_4)_V$	3	-1	-1	-1
$(\chi_5)_V$	3	-1	-1	-1

Könnyű ellenőrizni, hogy $\operatorname{Irr} V$-nek két konjugált osztálya van. Az egyik $\{1_V\}$ és a másik $\{\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$. Azonnal leolvasható, hogy $(\chi_3)_V = 2 \cdot 1_V$, illetve $(\chi_i)_V = \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$, ha $i = 4$ vagy 5.

Tekintsük most a $H = A_4$ normális részcsoportját a G-nek. Az A_4 karaktertábláját az eddigi ismereteink alapján könnyen meghatározhatjuk. Tudjuk, hogy A_4-nek négy darab konjugáltosztálya van, ezek az $\{1\}$, a $V \setminus \{1\}$ és a hármas ciklusoknak az $(...)_1 = \{(123), (142), (134), (243)\}$, illetve $(...)_2 = \{(132), (124), (143), (234)\}$ osztálya. Egyetlen nem triviális normális részcsoportja a V, amely az A_4 kommutátora is. Ezért 3 darab lineáris karaktere van és egy darab irreducibilis harmadfokú. A lineáris karaktereket az 1. Megjegyzésben mutatott módon meghatározzuk, majd az ortogonalitási relációk segítségével a harmadfokú karakter értékeit is megkapjuk. Legyen ε egy primitív harmadik egységgyök, akkor A_4 karaktertáblája az alábbi.

A_4	1	$(..)(..)$	$(...)_1$	$(...)_2$
1_{A_4}	1	1	1	1
ψ_2	1	1	ε	ε^2
ψ_3	1	1	ε^2	ε
ψ_4	3	-1	0	0
$(\chi_2)_H$	1	1	1	1
$(\chi_3)_H$	2	2	-1	-1
$(\chi_4)_H$	3	-1	0	0

A táblázatot kiegészítettük az S_4 irreducibilis karaktereinek A_4-re való megszorításával is. Könnyű látni, hogy most $\operatorname{Irr} A_4$-nek három konjugáltosztálya van. Ezek az $\{1_{A_4}\}$, a $\{\psi_2, \psi_3\}$ és a $\{\psi_4\}$.

A táblázatból leolvashatjuk, hogy $(\chi_2)_H = 1_H$, hogy $(\chi_3)_H = \psi_2 + \psi_3$, illetve hogy $(\chi_4)_H = \psi_4$.

5.2. A Clifford–tétel alkalmazásai

A fejezet további részében a konjugált karakterek és a Clifford–tétel két alkalmazását is megmmutatjuk.

5.10. Definíció. Legyen p egy prímszám. Azt mondjuk, hogy a G véges csoport rendelkezik normál p-komplementummal, ha $G = N \rtimes P$, ahol $P \in \operatorname{Syl}_p(G)$.

5.11. Tétel. *Tegyük fel, hogy létezik olyan p prímszám, amire a G-nek minden irreducibilis karaktere p-hatvány fokú. Ekkor G-ben létezik Abel–féle normál p-komplementum.*

Bizonyítás. A G rendjére vonatkozó indukcióval bizonyítunk.

1., Megmutatjuk, hogy létezik olyan $H \lhd G$, hogy $|G : H| = p$. Tudjuk, hogy

$$|G| = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} G} \chi(1)^2 = |G : G'| + \sum_{\substack{\chi \in \operatorname{Irr} G \\ \chi(1) \neq 1}} .$$

Az egyenlet bal oldalán $|G|$-t osztja p, így szükségképpen p osztja a bal oldalt is. Feltevésünk szerint $p \mid \chi(1)$, ha $\chi(1) \neq 1$, ami miatt $p \mid |G : G'| = |G/G'|$ és a G/G' egy Abel–csoport. Emiatt G/G'-ben létezik p indexű normálosztó. Jelölje H e normálosztó G-beli ősképét.

2., A H-ra teljesülnek a tétel feltételei, hiszen ha $\varphi \in \operatorname{Irr} H$, akkor van olyan $\chi \in \operatorname{Irr} G$, hogy $[\varphi^G, \chi] \neq 0$. A Clifford–tétel szerint $\chi_H = e \sum_{i=1}^{t} \varphi_i$, ahol φ_i-k a φ különböző konjugáltjai. Kiértékelve χ-t a csoport egységén

$$\chi(1) = \chi_H(1) = e \cdot t \cdot \varphi(1)$$

adódik, ahol a bal oldal egy prímhatvány, így szükségképpen $\varphi(1)$ is prímhatvány.

3., Az indukciós feltveés szerint ekkor H-ban létezik Abel–féle p-normál komplementum, azaz van olyan $A \lhd H$, hogy $H = A \rtimes P'$. Ez az A a G-re nézve is egy normál p-komplementum (és nyilvánvalóan Abel). Ehhez elég észrevenni, hogy bármely p-től különböző q prímszám esetén az A tartalmazza az összes $\operatorname{Syl}_q(H)$-beli részcsoportot. Sőt az ilyenek generálják is H-t. Emiatt az A egy karakterisztikus részcsoportja a H-nak, így normális részcsoportja a G-nek. Továbbá $p \nmid |A|$ és $|G : A| = |G : H||H : A|$ egy prímhatvány. Tehát, ha $P \in \operatorname{Syl}_p(G)$, akkor $AP = G$ és $A \cap P = 1$.

$\square$

5.12. Megjegyzés. A tétel megfordítása is igaz, hiszen ha A egy Abel–féle normál p-komplementum, akkor az Ito–tétel (ld. 6.10.) szerint $\chi(1) \mid |G : A|$ minden $\chi \in \operatorname{Irr} G$ esetén.

5.13. Lemma. *Legyen G egy Frobenius–csoport H komplementummal és a hozzátartozó $N = \mathcal{N}$ maggal (ld. 4.10.). Ekkor $G = N \rtimes H$.*

Bizonyítás. Az N definíciója miatt $N \cap H = 1$ és N valóban normálosztó. Válasszunk egy $\{x_i\}$ reprezentáns rendszert a H részcsoporthoz, azaz tegyük fel, hogy $G = \bigcup_{i=1}^{|G:H|} Hx_i$. Ha $i \neq j$, akkor $H^{x_i} \cap H^{x_j} = 1$, ugyanis $x_i x_j^{-1} \notin H$, amiből $H^{x_i x_j^{-1}} \cap H = 1$.

Másrészt $H^{nx_i} = H^{x_i}$ minden $n \in N$ elemre, amiből azt látjuk, hogy H^{x_i} az összes konjugáltja H-nak. Akkor pedig

$$|G| = |G : H|(|H| - 1) + |N| = |G| - |G : H| + |N|,$$

vagyis $|N| = |G : H|$. Mivel pedig $N \cap H = 1$, ezért $|HN| = |H||N| = |H||G : H| = |G|$, tehát $HN = G$. $\square$

5.14. Tétel. *Tegyük fel, hogy G egy Frobenius–csoport N maggal és H komplementummal. Legyen φ egy nem triviális irreducibilis karaktere N-nek. Ekkor $\varphi^G \in \operatorname{Irr} G$.*

Bizonyítás. A bizonyítást több lépésben végezzük.

1., Ha $1 \neq x \in N$, akkor $\mathrm{C}_G(x) \leq N$, ugyanis, ha van olyan h^y alakú elem, amely $\mathrm{C}_G(x)$-nek is eleme, akkor $[x, h^y] = 1$, vagyis $[x^{y^{-1}}, h] = 1$. Ám $x \in N$, ezért $x^{y^{-1}} = n \in N$, és azt kaptuk, hogy $h \in H^n \cap H = 1$.

2., Bármely $h \in H \setminus \{1\}$ a konjugálással úgy hat az N-en, hogy annak egyetlen nem triviális konjugáltosztályát sem hagyja helyben. Indirekt tegyük fel, hogy mégis, azaz a $h \neq 1$-hez találunk olyan $1 \neq x \in N$ elemet, amelyre $x^h = x^n$ alkalmas $n \in N$-nel. Ekkor viszont $x^{hn^{-1}} = x$, másképpen mondva hn^{-1} centralizálja x-et, és az 1. pont miatt így $h \in H \cap N$, tehát $h = 1$.

3., Ha $1 \neq h \in H$, akkor a h elemmel való konjugálás az N egyetlen 1_N-től különböző irreducibilis karakterét sem hagyja fixen. Ehhez vegyük észre, hogy az N karaktertábláján az N konjugáltosztályainak h-val való konjugálása az oszlopokat permutálja, azaz ha C az N karaktertáblájából származtatott mátrix, akkor ez a hatás leírható egy $C \mapsto C \cdot Q$ mátrixművelettel. Hasonlóan, az N irreducibilis karakterein, h elemmel történő konjugálás a karaktertábla sorait permutálja, azaz a hatás leírható egy $C \mapsto PC$ mátrixművelettel.

Mind P, mind Q permutációs mátrixok, sőt a 2. pont miatt látjuk, hogy Q az alábbi

$$\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & \dots \\ \hline 0 & 0 & * \\ \vdots & * & 0 \end{array}\right]$$

blokkszerkezetű. Tehát többek közt $\operatorname{tr} Q = 1$. Azt is tudjuk, hogy $PC = CQ$ és C invertálható, mert ortogonális. Így $P = CQC^{-1}$, amiből $\operatorname{tr} P = 1$. A P főátlójában is csak egy darab 1-es szerepel, amely az N triviális karakteréhez tartozó sorban van. A többi karaktert a h-val való konjugálás nem hagyja fixen.

4., Legyen $1_N \neq \varphi \in \operatorname{Irr} N$. A Clifford–tétel szerint $(\varphi^G)_N = e\sum_{i=1}^t \varphi_i$, ahol φ_i karakterek a φ különböző konjugáltjai, és $e = [(\varphi^G)_N, \varphi] = [\varphi^G, \varphi^G]$. Mivel H fixpontmentesen és tranzitívan hat a $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_t\}$ halmazon, ezért $|H| = t$. Viszont $\varphi^G(1) = |G : N|\varphi(1)$, másrészt $(\varphi^G)_N = e|G : N|\varphi(1)$, tehát $e = 1$. Vagyis $[\varphi^G, \varphi^G] = 1$, azaz φ^G irreducibilis karaktere G-nek.

□

6. Burnside „$p^\alpha q^\beta$-tétele"

Az előző részhez hasonlóan, e fejezet célja szintén egy tisztán csoportelméleti eredmény karakterelmélet segítségével való bizonyítása. A tétel bizonyítása az algebrai egészek tulajdonságait használja ki és természetesen azt a tényt, hogy egy karakter csak algebrai egész értékeket vehet fel.

6.1. Definíció. Az $\alpha \in \mathbb{C}$ egy algebrai egész, ha létezik olyan 1-főegyütthatójú $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom, amelyre $f(\alpha) = 0$.

Az algebrai egészek halmazának két alapvető tulajdonsága, hogy összegre és szorzásra zárt, illetve hogy a racionális számtesttel vett metszete megegyezik az egész számok halmazával. E két tényt a teljesség kedvéért igazoljuk is.

6.2. Tétel. *A racionális algebrai egészek halmaza megegyezik az egész számok halmazával.*

Bizonyítás. Ha $z \in \mathbb{Z}$ egy egész szám, akkor z gyöke az $f(x) = (x - z) \in \mathbb{Z}[x]$ polinomnak, tehát egy racionális algebrai egész.

A megfordításhoz legyen r/s egy algebrai egész, ahol $r, s \in \mathbb{Z}$. Feltehetjük, hogy $(r, s) = 1$. Legyen $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ az a $\mathbb{Z}[x]$-beli polinom, amelynek az r/s gyöke. Azaz

$$(r/s)^n + a_{n-1}(r/s)^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

ezt átrendezve, s^n-nel átszorozva

$$r^n = -s(a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_0 s^{n-1}) = s \cdot z, \ z \in \mathbb{Z}.$$

Azt kapjuk, hogy $s \mid r^n$, ami ellentmond $(r, s) = 1$ feltevésünknek. □

6.3. Lemma. *Legyen $X = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ algebrai egészek egy véges halmaza. Ekkor létezik egy olyan S gyűrű, amelyre*

1., $\mathbb{Z} \subseteq S \subseteq \mathbb{C}$;

2., $X \subseteq S$;

3., S mint Abel–csoport végesen generált.

Bizonyítás. Mivel α_i algebrai egész, ezért létezik olyan $f_i \in \mathbb{Z}[x]$ polinom, amely legfeljebb $(n_i - 1)$-edfokú és $\alpha_i^n = f_i(\alpha_i)$. Legyen $Y = \{\alpha_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_k^{r_k} \mid 0 \leq r_i \lneq n_i\}$. Legyen S az Y halmaz által generált Abel–csoport. Ekkor az állításban szereplő 1-3. tulajdonság teljesül S-re, elég csak azt belátni, hogy valóban egy gyűrű. Mivel $\alpha_i^{n_i}$ előállítható az $1, \alpha_i, \ldots, \alpha_i^{n_i - 1}$ elemek $\mathbb{Z}$-lineáris kombinációjaként, ezért tetszőleges két S-beli elem szorzata szintén előállítható Y-beli elemek $\mathbb{Z}$-lineáris kombinációjaként. Vagyis S a szorzásra is zárt és így egy gyűrű. □

6.4. Állítás. *Legyen S egy olyan gyűrű, amelyre $\mathbb{Z} \subseteq S \subseteq \mathbb{C}$ és S mint Abel–csoport végesen generált. Ekkor S minden eleme algebrai egész.*

Bizonyítás. Legyen $s \in S$ és tegyük fel, hogy az $Y = \{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq S$ az S-nek mint Abel–csoportnak egy generátora. Ekkor minden $1 \leq i \leq$-re

$$sy_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j, \quad a_{i,j} \in \mathbb{Z}.$$

Legyen A az a mátrix, amely i. sorának j. eleme $a_{i,j}$ és jelölje $\mathbf{v}$ az $y_1, \ldots, y_n$ elemekből álló oszlopvektort. Ezzel $A\mathbf{v} = \mathbf{sv}$, vagyis s az A mátrix egy sajátértéke, ezért az $f(x) = \det(A - x \cdot I)$ egész együtthatós, 1 főegyütthatójú polinomnak gyöke. Tehát s algebrai egész. □

6.5. Tétel. *Algebrai egészek összege és szorzata is algebrai egész. Így az algebrai egészek gyűrűt alkotnak.*

Bizonyítás. Ha α, β algebrai egészek, akkor a 6.3. Lemma miatt van olyan S gyűrű, amely végesen geneárt mint Abel–csoport, tartalmazza α-t és β-t, továbbá $\mathbb{Z} \subseteq S \subseteq \mathbb{C}$. Emiatt S tartalmazza $\alpha + \beta$-t és $\alpha\beta$-t. Viszont a 6.4. Állítás miatt minden S-beli elem algebrai egész is.

Az algebrai egészek halmaza tehát összeadásra, szorzásra zárt, tartalmazza a 0 és 1 elemeket, hiszen $\mathbb{Z}$ minden eleme algebrai egész is. Ezek szerint az algebrai egészek a $\mathbb{C}$ egy részgyűrűjét alkotják. □

6.6. Lemma. *Legyen $X : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ a G véges csoport egy komplex irreducibilis reprezentációja. Ekkor $\mathrm{C}_{\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)}(X(G)) = \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$.*

Bizonyítás. Az világos, hogy $\{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathrm{C}_{\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)}(X(G))$, ezért csak a fordított tartalmazást kell belátni. A Schur–lemma egy következménye, hogy $\mathrm{End}_{\mathbb{C}G}(V)$ egy ferdetest. Vegyük észre, hogy $\mathrm{C}_{\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)}(X(G)) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}G}(V)$, hiszen $\mathrm{End}_{\mathbb{C}G}(V)$-ben V-nek pontosan azok a lineáris endomorfizmusai vannak, amelyek felcserélhetők minden $X(g)$ alakú endomorfizmussal. A $\mathrm{C}_{\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)}(X(G))$ tehát tekinthető a $\mathbb{C}$ egy véges bővítésének, $\mathbb{C}$ algebrai zártsága miatt $\mathrm{C}_{\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)}(X(G)) \cong \mathbb{C}$, amivel az állítást igazoltuk. □

6.7. Állítás. *Legyen $X : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ a G csoport egy tetszőleges reprezentációja, legyen χ az X-hez tartozó karakter. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1., $\mathrm{Z}(\chi)/\ker\chi \leq \mathrm{Z}(G/\ker\chi)$;

2., ha $\chi \in \mathrm{Irr}\, G$, *akor* $\mathrm{Z}(\chi)/\ker\chi = \mathrm{Z}(G/\ker\chi)$;

3., $\mathrm{Z}(G) = \bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G} \mathrm{Z}(\chi)$.

Bizonyítás. 1., Az állítást bizonyítottuk a 2.7. Állítás 5. pontjában.

2., Az 1. pont alapján elég belátni, hogy ha χ irreducibilis és $\bar{g} = g\ker\chi \in \mathrm{Z}(G/\ker\chi)$, akkor $g \in \mathrm{Z}(\ker\chi)$, vagyis $|\chi(g)| = \chi(1)$.

Ha $\bar{g} \in \mathrm{Z}(G/\ker\chi)$, akkor $X(g) \in \mathrm{Z}(X(g))$ és a 2.7., ill. 6.6. Állítások alapján $X(g) = \lambda I$, valamilyen λ egységgyökkel. Ezért $\chi(g) = \lambda\chi(1)$, tehát $|\chi(g)| = \chi(1)$.

3., Az, hogy $\mathrm{Z}(G) \leq \bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}\, G} \mathrm{Z}(\chi)$, a 2. pont állításából következik. A fordított tartalmazáshoz tegyük fel, hogy $\chi(g) \in \mathrm{Z}(g)$ minden irreducibilis χ karakter esetén. A 2. állítás szerint egy tetszőleges χ-t választva $\bar{g} \in \mathrm{Z}(G/\ker\chi)$. Másképp mondva, bármely $x \in G$ elem esetén $\bar{x}, \bar{g}$ felcserélhető $G/\ker\chi$-ben, tehát az $[x, g]$ kommutátor szükségképpen $\ker\chi$-beli minden x-re. Mivel χ tetszőleges volt, azt kapjuk, hogy $[x, g] \in \cap \ker\chi$. Viszont $\cap \ker\chi = 1$ (2.24.), így g felcserélhető minden $x \in G$ elemmel.

□

6.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy χ egy irreducibilis karaktere a G-nek és jelölje $\mathcal{K} = \mathcal{K}(g)$ a $g \in G$ elem konjugáltosztályát. Ekkor $\chi(g)|\mathcal{K}|/\chi(1)$ egy algebrai egész.*

Bizonyítás. Legyen $X : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ a χ-hez tartozó irreducibilis reprezentáció. Jelölje $\tilde{X} : \mathbb{C}G \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ az X lineáris kiterjesztését. Rögzítsünk egy tetszőleges g elemet és annak $\mathcal{K}$ konjugáltosztályát. Ha K a $\mathcal{K}$ konjugáltosztályhoz tartozó $K = \sum_{x \in \mathcal{K}} x$ osztályösszeg, akkor $K \in \mathrm{Z}(\mathbb{C}G)$, speciálisan $K \in \mathrm{C}_{\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)}(X(G))$, így a 6.6. Lemma miatt $X(K) = \omega I$ egy alkalmas ω komplex számmal. Belátjuk, hogy ω egy algebrai egész.

Jelölje $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_t$ a G konjugáltosztályait és $K_1, \ldots, K_t$ a hozzájuk tartozó osztályösszegeket. Ahogy megállapítottuk, minden $1 \leq i \leq t$ esetén $X(K_i) = \omega_i I$. Az 1.21. Állítás alapján K_i egy bázisát adja $\mathrm{Z}(\mathbb{C}G)$-nek. Ezért

$$KK_i = \sum a_{i,j} K_j, \tag{15}$$

mert KK_i szintén centrumbeli. Az $a_{i,j}$ együthatókról még azt is tudjuk, hogy egészek, hiszen KK_i csoportelemek összege. Alkalmazzuk $\tilde{X}$-ot a (15) mindkét oldalán.

$$\begin{aligned} X(K)X(K_i) &= \sum_j a_{i,j} X(K_j) \\ \omega I \omega_i I &= \sum_j a_{i,j} \omega_j I \\ \omega \omega_i &= \sum_j a_{i,j} \omega_j. \end{aligned}$$

Az így kapott egyenletrendszert mátrixos alakja $(\omega I - A)x = 0$, ahol $[A]_{i,j} = a_{i,j}$. Ez egy homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek egy nem triviális megoldása $(\omega_1, \ldots, \omega_t)$. Tehát a $\det(\omega I - A) = 0$, vagyis ω gyöke az 1-főegyütthatós $f(x) = \det(xI - A) \in \mathbb{Z}[x]$ polinomnak. Ezzel beláttuk, hogy ω algebrai egész.

Ezzel $\chi(K) = \mathrm{tr}\,(\omega I) = \omega\chi(1)$, másrészt $\chi(K) = \sum_{x \in \mathcal{K}} \chi(x) = |\mathcal{K}|\chi(g)$. A két egyenlőségből

$$\omega = \frac{|\mathcal{K}|\chi(g)}{\chi(1)} \quad \text{egy algebrai egész.}$$

□

6.9. Tétel. *Ha χ a G csoport egy irreducibilis karaktere, akkor $\chi(1) \mid |G|$.*

Bizonyítás. Legyen χ egy tetszőleges irreducibilis karakter, jelölje $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_t$ a G konjugáltosztályait, $g_i \in \mathcal{K}_i$ pedig az osztályok egy-egy reprezentánsát. Az I. ortogonalitási relációt használva írjuk át $|G|$-t az alábbi módon.

$$|G| = \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi(g)} = \sum_{i=1}^{t} \sum_{g \in \mathcal{K}_i} \chi(g)\overline{\chi(g)} = \sum_{i=1}^{t} |\mathcal{K}_i|\chi(g_i)\overline{\chi(g_i)}.$$

Az egyenlőséglánc mindkét végét leosztva $\chi(1)$-gyel, kapjuk hogy

$$\frac{|G|}{\chi(1)} = \sum_{i=1}^{t} \underbrace{\frac{|\mathcal{K}|\chi(g_i)}{\chi(1)}}_{\text{alg. egész}} \underbrace{\overline{\chi(g_i)}}_{\text{alg. eg.}}.$$

Az egyenlet jobb oldala egy algebrai egész áll, míg a bal oldalon a $|G|/\chi(1)$ két egész hányadosa, tehát racionális. A 6.2. Tétel miatt $|G|/\chi(1)$ egész szám. $\square$

6.10. Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy a 6.9. Tétel eredménye tovább is erősíthető. Általában is igaz, hogy $\chi(1) \mid |G : \mathrm{Z}(G)|$, sőt ha A egy Abel–féle normálosztója G-nek, akkor $\chi(1) \mid |G : A|$. Ez utóbbi eredmény Ito tétele.

6.11. Tétel (Burnside–tétel)**.** *Tegyük fel, hogy a G irreducibilis χ karakterére és egy $\mathcal{K}$ konjugáltosztályára $(|\mathcal{K}|, \chi(1)) = 1$. Ekkor minden $g \in \mathcal{K}$ elemre vagy $g \in \mathrm{Z}(\chi)$, vagy $\chi(g) = 0$.*

Bizonyítás. A $\chi(1)$ és a $|\mathcal{K}|$ relatív prímek, ezért léteznem olyan u, v egészek, amelyekkel $u\chi(1) + v|\mathcal{K}| = 1$. Az egyenlet mindkét oldalát $\chi(g)/\chi(1)$-gyel szorozva

$$u\chi(g) + v\frac{|\mathcal{K}|\chi(g)}{\chi(1)} = \frac{\chi(g)}{\chi(1)}$$

egyenlőséghez jutunk. A bal oldalon két algebrai egész összege van, ezért a jobb oldalon $\alpha := \chi(1)/\chi(g)$ is egy algebrai egész.

Ha $\alpha = 0$, kész vagyunk. Tegyük fel, hogy $\alpha \neq 0$. Meg kell mutatni, hogy ekkor $|\alpha| = 1$. Azt már láttuk, hogy $|\alpha| \leq 1$. Indirekt tegyük fel, hogy $0 < |alpha| < 1$. Az α benne van a $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ testben, ahol $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ a racionális számtest egy ε elemmel vett a bővítését jelöli. Az ε elemről tudjuk, hogy egy primitív m. egységgyök, ha m a g rendje.

Jelölje Γ a $\mathbb{Q}(\varepsilon)|\mathbb{Q}$ bővítéshez tartozó Galois–csoportot és legyen

$$\beta = \prod_{\sigma \in \Gamma} \alpha^{\sigma}.$$

A β definíciójából világos, hogy ha $\pi \in \Gamma$, akkor π a β-t fixen hagyja, vagyis $\beta^{\pi} = \beta$ minden $\pi \in \Gamma$-ra. Ebből viszont az következik, hogy a β a $\mathbb{Q}$ alaptestnek egy eleme. Vegyük észre, hogy β algebrai egész, mert α^{σ} gyöke ugyanaannak az 1-főegyütthatós $\mathbb{Z}$-feletti f polinomnak, amelynek α gyöke, hiszen $f(\alpha^{\sigma}) = [f(\alpha)]^{\sigma} = 0$.

Összefoglalva β egy racionális algebrai egész, amelynek abszolútértéke

$$0 \neq |\beta| = \left| \prod_{\sigma \in \Gamma} \alpha^{\sigma} \right| = \prod_{\sigma \in \Gamma} |\alpha^{\sigma}| < 1,$$

ami ellentmondás, hiszen β egy egész szám. Az ellentmondásból arra jutunk, hogy ha $\chi(g) \neq 0$, akkor $|\chi(g)| = \chi(1)$, azaz $g \in \ker \chi$. $\square$

6.12. Állítás. *Ha G egy egyszerű csoport, amely nem Abel–féle, akkor bármely nem egységhez tartozó $\mathcal{K}$ konjugáltosztályára $|\mathcal{K}|$ nem lehet prímhatvány.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy G egy egyszerű nem Abel–csoport. Ha χ egy 1_G-től különböző irreducibilis karaktere G-nek, akkor $\ker\chi = 1$, hiszen $\ker\chi$ normálosztója G-nek és G nem Abel–féle. Legyen $1 \neq g \in G$ és a g-t tartalmazó konjugáltosztályt jelölje $\mathcal{K}$. Indirekt tegyük fel, hogy $|\mathcal{K}| = p^t$ valamely p prímre, t nem negatív egészre.

Ha a χ olyan, hogy $p \nmid \chi(1)$, akkor $(\chi(1), |\mathcal{K}|) = 1$ és a Burnside–tétel miatt $\chi(g) = 0$ vagy $\chi(g) = 1$. Utóbbi nem lehet, hiszen – ahogy azt megállapítottuk – $\mathrm{Z}(\chi) = 1$. Tehát ebben az esetben $\chi(g) = 0$ lehet csak.

Számoljuk ki a reguláris karakter értékét g-n!

$$0 = \varrho(g) = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}\,G} \chi(1)\chi(g) = 1 + \underbrace{\sum_{\substack{p\nmid\chi(1)\\ \chi\in\mathrm{Irr}\,G\setminus\{1_G\}}} \chi(1)\chi(g)}_{=0} + \underbrace{\sum_{\substack{p\mid\chi(1)\\ \chi\in\mathrm{Irr}\,G}} \chi(1)\chi(g)}_{\substack{=p\cdot\alpha,\text{ ahol}\\ \alpha\text{ algebrai egész}}} = 1 + p\alpha,$$

amiből $\alpha = -(1/p)$, ami ellentmondás. □

6.13. Tétel (Burnside–féle $p^\alpha q^\beta$ tétel)**.** *Ha a G csoport rendje $p^\alpha q^\beta$, ahol p, q prímek és α, β nem negatív egészek, akkor G feloldható.*

Bizonyítás. A bizonyítás $|G|$-re vonatkozó teljes indukcióval történik. Feltehetjük, hogy $\alpha, \beta > 1$ és elég megmutatni, hogy G nem egyszerű, hiszen a feloldhatóság bővítésre öröklődik, és G midnen faktorának rendje $p^{\alpha'} q^{\beta'}$ alakú.

Legyen $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ és $1 \neq g \in \mathrm{Z}(P)$. Ekkor g-t centralizálja P vagyis $P \leq \mathrm{C}_G(g)$, amiből $|\mathcal{K}(g)| \mid q^\beta$. A 6.12. Állítás alapján G nem lehet egyszerű. □

7. A moduláris reprezentációelmélet elemei

Ebben az utolsó fejezetben az eddigiektől eltérően olyan reprezentációkat tekintünk, amelyeknél az alaptest karakterisztikája pozitív és osztja a csoport rendjét. Tehát legyen F egy p karakterisztikájú test, amelyről feltesszük, hogy algebrailag tárt úgy, hogy az $F|\mathbb{Z}_p$ egy algebrai bővítés (másképp az F-et a $\mathbb{Z}_p$ algebrai lezártjának válasszuk). Ha G egy véges csoport, akkor az A jelölje az FG csoportalgebrát. A fejezet során az az eset lesz számunkra érdekes, amikor $p \mid |G|$. Így a továbbiakban G mindig egy olyan véges csoport, amelynek rendjét osztja $\mathrm{char}\,F$ és F mindig olyan, amilyennek az imént definiáltuk.

Emlékeztetnénk, hogy ebben (a moduláris) esetben az $A = FG$ csoportalgebra nem féligegyszerű, $J(A)$ radikálja nem 0. Viszont $A/J(A)$ természetesen féligegyszerű, sőt

$$A/J(A) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(F),$$

hiszen az $\mathbb{F}$ egy algebrailag zárt test. Ezen felül az $S_1, \ldots, S_r$ az összes különböző egyszerű modulusa (irreducibilis reprezentációja) FG-nek, tehát $M_{n_i}(F) \cong S_i^{n_i}$ mint A-modulus. Az S_i dimenziója (akárcsak az S_i-hez tartozó reprezentáció foka) n_i és

$$\sum_{i=1}^{r} n_i^2 = \dim_F A/J(A) < \dim_F A.$$

Higman tétele alapján tudjuk, hogy az A pontosan akkor véges reprezentáció-típusú, ha a G-nek a p-Sylow részcsoportja ciklikus. Ezért általános esetben az ind-A leírása nehéz. Sőt még ind-A projektív modulusainak leírása is bonyolult feladat. Ezért a továbbiakban főként arra törekszünk, hogy az A egyszerű modulusairól mondjuk valamit. Az ez irányú vizsgálatainkat a G csoport karakterelméletén keresztül próbáljuk végezni.

7.1. F-karakterek

7.1. Definíció. Legyen a V egy F-vektortér és az $Y : G \to \mathrm{GL}_F(V)$ egy csoporthomomorfizmus. Ekkor az Y a G csoport egy F-reprezentációja, amelynek $\psi : G \to F$ (F-)karaktere a $\psi(g) = \mathrm{tr}\ Y(g)$ módon definiált.

7.2. Megjegyzés. Világos, hogy minden F-karakter osztályfüggvény. Az irreducibilis F-reprezentációkhoz tartozó karaktereket irreducibilis (F-)karaktereknek nevezzük.

7.3. Állítás. *A G csoport bármely F-karaktere előáll mint irreducibilis F karaktereinek valamely összege, továbbá az irreducibilis F-karakterek lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás. Legyen a G egy tetszőleges reprezentációja $Y : G \to \mathrm{GL}_F(V)$. A V-ről feltehetjük, hogy nem (félig)egyszerű. Legyen a V egy kompozíciólánca $0 = V_0 < V_1 < \ldots < V_t = V$. Az $Y(g)$ mátrixokat írjuk fel egy ezt követő bázisban. Ekkor

$$Y(g) \sim \left[\begin{array}{cc|c|ccc|cc} * & * & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ * & * & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hline * & * & * & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hline * & * & * & * & * & * & 0\dots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0\dots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0\dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{array}\right]$$

egy blokk alsó háromszög alakú mátrix. A főátlóbeli blokkokban a V_{i+1}/V_i faktorokon való hatás jelenik meg, ami irreducibilis, tehát

$$Y(g) \sim \begin{bmatrix} Y_1(g) & 0 & \dots & & 0 \\ * & Y_2(g) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & * & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \dots & & \dots & Y_t(g) \end{bmatrix}$$

alakú. A mátrix nyomát leolvasva $\psi(g) = \sum_{i=1}^{t} \psi_i(g)$, ahol ψ_i az Y_i irreducibilis reprezentáció karaktere.

A második állítás belátásához tekintsük az $A/J(A) \cong M_{n_i}(F)$ felírást. Jelölje $Y_1, \ldots, Y_r$ a G irreducibilis reprezentációit és legyen ψ_i az Y_i-hez tartozó karakter. Az Y_i reprezentációhoz tartozó egyszerű S_i moduluson az A hatása megadható $M_{n_i}(F)$-beli mátrixokkal való szorzásként. Válasszuk a $b_i \in A$ elemeket olyannak, hogy $\bar{b}_i = \mathrm{diag}[1, 0, \ldots, 0] \in M_{n_i}(F)$. Erre igaz, hogy $\psi_i(b_i) = 1$ és $\psi_j(b_i) = 0$, ha $i \neq j$. Most ha $\psi = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \psi_i = 0$ valamilyen $\alpha_i \in F$ skalárokkal, akkor ψ-t kiértékelve a b_j-ken, azt kapjuk, hogy minden i indexre $\alpha_i = 0$. □

7.4. Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy ellentétben a komplex reprezentációkkal, a moduláris esetben előfordulhat, hogy két nem ekvivalens reprezentációhoz ugyanaz a karakter tartozik.

Vegyük észre, hogy a 7.3. Állítás alapján egy felső korlát adódik a G irreducibilis F-karaktereinek számára, hiszen legfeljebb annyi irreducibilis karaktere lehet $|G|$-nek, ahány konjugáltosztálya van.

7.5. Lemma. *Legyen G egy véges csoport, amelyről feltesszük, hogy $p \mid |G|$ valamely p prímre. Ekkor minden $g \in G$ egyértelműen írható $g = g_p g_{p'}$ alakba úgy, hogy $g_p, g_{p'} \in \langle g \rangle$, valamint $o(g_p) = p^k$ és $p \nmid o(g_{p'})$.*

Bizonyítás. Legyen $o(g) = n = m \cdot p^a$, ahol $p \nmid m$. Akkor léteznek olyan u, v egészek, amelyekkel $up^a + vm = 1$, amiből

$$g = g^{up^a} + g^{vm} \quad \Rightarrow \quad g_{p'} := g^{up^a} \text{ és } g_p := g^{vm} \text{ alkalmas.}$$

Az egyértelműség belátásához tegyük fel, hogy $g = g_p g_{p'} = g'_p g'_{p'}$. Ezt átrendezve ${g'_p}^{-1} g_p = g'_{p'} g_{p'}^{-1}$. A jobb és bal oldalon álló elemek rendjei relatív prímek, ezért a jobb és a bal oldal is csak az $1 \in G$ lehet. □

7.6. Megjegyzés. Egy g csoportelem 7.5. Lemma szerinti (egyértelműen létező) $g = g_p g_{p'}$ felbontását a g-hez tartozó p-reguláris felbontásnak, a g_p-t a g elem p-szinguláris, míg $g_{p'}$-t a g elem p-reguláris részének nevezzük. Vegyük észre, hogy ha $g, h \in G$ konjugáltak, akkor g_p és h_p, illetve $g_{p'}$ és $h_{p'}$ szintén konjugáltak, hiszen egy csoportelem p-szinguláris, illetve p-reguláris része mindig hatványa az adott elemnek.

7.7. Állítás. *Legyen $Y : G \to \mathrm{GL}_F(V)$ egy tetszőleges reprezentáció, jelölje ψ az Y-hoz tartozó F-karaktert. Bármely $g \in G$ esetén $\psi(g) = \psi(g_{p'})$.*

Bizonyítás. Válasszunk egy tetszőleges g elemet, legyen $m = o(g)$. Írjuk $Y(g)$-t felső háromszög mátrixalakba (pl. vehetjük $Y(g)$ Jordan–normálalakját). Akkor

$$Y(g) \sim \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & * & \dots & * \\ 0 & \varepsilon_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

ahol minden i-re $\varepsilon_i^m = 1$, hiszen $Y(g)^m = Y(g^m) = I_n$. Tekintsük a g-hez tartozó p-reguláris felbontást és eszerint írjuk fel $Y(g)$-t!

$$Y(g) = Y(g_p)Y(g_{p'}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon'_1 & * & \dots & * \\ 0 & \varepsilon'_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon'_n \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} \varepsilon''_1 & * & \dots & * \\ 0 & \varepsilon''_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon''_n \end{bmatrix}$$

A B mátrix olyan, hogy $B^{p^a} = I$, mivel g_p egy p-szinguláris elem. Másképp B gyöke az $x^{p^a} - 1$ polinomnak, amely polinom a p karakterisztikájú test felett megegyezik $(x-1)^{p^a}$ polinommal. Így B-nek minden sajátértéke 1, azaz $\varepsilon'_i = 1$ minden i indexre. Ebből pedig azt látjuk, hogy $\varepsilon_i = \varepsilon''_i$ minden i index esetén, tehát $\psi(g) = \psi(g_{p'})$. □

7.8. Következmény. *Az irreducibilis F-karakterek száma legfeljebb annyi, mint a G-beli p-reguláris elemek konjugáltosztályainak száma.*

7.9. Példa. Tekintsük az S_5 szimmetrikus csoportot, és határozzuk meg a csoport p- reguláris konjugáltosztályait, illetve az irreducibilis F-karakterek lehetséges maximális számát a különböző prímekhez tartozó (moduláris) esetekben.

	1	(..)(..)	(...)	(.....)	(..)	(....)	(..)(...)	$\sum$
$p=2$	✓	×	✓	✓	×	×	×	3
$p=3$	✓	✓	×	✓	✓	✓	×	5
$p=5$	✓	✓	✓	×	✓	✓	✓	6

7.2. Brauer–karakterek

Szeretnénk továbbra is megkapni egy G csoport összes irreducibilis F-karakterét. Ha például tudjuk, hogy G összes irreducibilis $\mathbb{C}$-reprezentációja esetén az $X(g)$ mátrix minden eleme egy egész szám (pl. ha $G \cong S_n$), akkor a mátrixelemeket $\pmod p$ tekintve irreducibilis F kakarakterekhez jutnánk. Azonban általában messze nem igaz, hogy $X(g)$ elemei egészek lennének. Ezért egy másik megközelítés szükséges.

Megpróbáljuk kapcsolatba hozni a G csoport (irreducibilis) $\mathbb{C}$-karaktereit a csoport F-karaktereivel. Ehhez először is *előállítjuk* az F testet a komplex számok segítségével. Legyen $R \subset \mathbb{C}$ az algebrai egészek gyűrűje. Az R természetesen tartalmazza az összes egész számot, így a príeket is. Egy rögzített p prímszámra legyen M egy olyan maximális ideál R-ben, amely tartalmazza a pR ideált. Ekkor az $F = R/M$ faktorgyűrű egy test. Az F karakterisztikája p, hiszen bármely $\bar{r} \in R = M$ elemre $p\bar{r} = \overline{pr} \in M$.

Jelölje $*$ az $R \to R/M$ természetes (gyűrű)homomorfizmust, és tekintsük a komplex egységgyökök egy

$$U = \{\varepsilon \in \mathbb{C} \mid \varepsilon^m = 1,\, p \nmid o(\varepsilon)\} \leq \mathbb{C}^\times$$

részcsoportját.

7.10. Állítás. *A bevezetett jelöléseket megtartva az alábbi állítások teljesülnek.*

1., Az F minden eleme algebrai a $\mathbb{Z}_p$ prímteste fölött.

2., A $*|_U : U \to F^\times$ egy csoportizomorfizmus.

3., Az F test algebrailag zárt.

Bizonyítás.

1., Legyen a^* tetszőleges. Az $a^* \in F = R/M$, ezért $a \in R$, vagyis a egy algebrai egész. Így van olyan 1-főegyütthatós $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom, amelynek a gyöke. Eszerint $f^*(a^* = 0$, ahol f^* az a polinom, amelynek együtthatói az f megfelelő együtthatóinak $*$ általi képe. Mivel f főegyütthatója 1, ezért f^* nem a konstans 0, továbbá f minden együtthatója $\mathbb{Z}_p$-beli. Azt kaptuk, hogy a^* algebrai $\mathbb{Z}_p$ fölött, és ezt az $f^* \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinom mutatja.

2., Az világos, hogy $*|_U$ egy csoporthomomorfizmus, hiszen $*$ egy gyűrűhomomorfizmus. Megmutatjuk, hogy $*|_U$ injektív és szürjektív. Először tegyük fel, hogy $1 \neq \varepsilon \in U$ olyan, hogy $\varepsilon^* = 1$. Legyen $m \neq 0$ egy olyan egész, hogy $\varepsilon^m = 1$, és amelyről feltehetjük, hogy $p \nmid m$. Ekkor ε gyöke $x^m - 1$-nek, sőt

$(x^m-1)/(x-1) = x^{m-1} + \ldots + x + 1$ polinomnak is. Viszont ε^* is gyöke a polinomnak, hiszen $*$ gyűrűhomomorfizmus. Akkor viszont $0 = m \cdot 1$, de $p \nmid m$ miatt ez p karakterisztikájú gyűrűben csak úgy teljesülhet, ha $m = 0$, ami viszont ellentmondás.

A szürjektivitáshoz belátjuk, hogy ha $E|F$ egy algebrai bővítés, akkor $E \leq U^*$. Legyen $0 \neq \alpha \in E$. Ekkor α algebrai elem $\mathbb{Z}_p$ fölött is, hiszen $E|F$ és $F|\mathbb{Z}_p$ is algebrai bővítés. Emiatt $|\mathbb{Z}_p(\alpha)| = p^k$, valamilyen k egészre. Ez azt jelenti, hogy $\mathbb{Z}_p(\alpha)$ mindent eleme (és így α is) gyöke a $g(x) = x^{p^k-1} - 1$ polinomnak. Viszont mind $\mathbb{C}$-ben, mind U-ban a g-nek $p^k - 1$ darab különböző gyöke van, $*|_U$ injektív, így U^*-ban is van g-nek $p^k - 1$ darab különböző gyöke. Tehát $\alpha \in U^*$.

3., Következik az előző észrevételünkből, miszerint F bármely algebrai bővítését az $U^* \leq F$ tartalmazza.

□

7.11. Következmény. *Ha a G-nek egy X reprezentációjához találnánk olyan vele ekvivalens X' reprezentációt, amelyre az $X'(g)$ mátrix minden eleme algebrai egész, akkor az $X'(g) \mapsto X(g)^*$ a G egy F-reprezentációját adná. Ezt azonban még mindig nem tudjuk garantálni, ezért R helyett egy bővebb gyűrűt keresünk.*

7.12. Definíció. Ha $R \subseteq \mathbb{C}$ az algebrai egészek gyűrűje és M ennek egy maximális ideálja, akkor jelölje $\tilde{R}$ azt a gyűrűt, amelynek elemei

$$\tilde{R} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \mid \alpha \in R,\, \beta \in R \setminus M \right\}.$$

Továbbá álljon $\tilde{M} \subseteq \tilde{R}$ azokból az α/β elemekből, amelyekre $\alpha \in M$. Az $\tilde{R}$ gyűrűt az R gyűrű M ideálra vonatkozó lokalizáltjának nevezzük.

7.13. Állítás. *Legyen adott egy M maximális ideál az R-ben. Ekkor az $\tilde{R}$ egy lokális gyűrű, amelynek maximális ideálja $\tilde{M}$, továbbá $M = \tilde{M} \cap R$ és $\tilde{R}/\tilde{M} \cong R/M \cong F$.*

Bizonyítás. Egyszerű számolás mutatja, hogy az $\tilde{M}$ ideálja az $\tilde{R}$-nak, ezért az első állításhoz elég belátni, hogy egy tetszőleges $\tilde{r} \in \tilde{R} \setminus \tilde{M}$ elemet választva, az $\tilde{r}$ invertálható. Ha $\tilde{r} = \alpha/\beta$ és $\alpha \notin M$, akkor $\beta/\alpha \in \tilde{R}$, tehát $\tilde{r}$ invertálható. Így $\tilde{M}$ az egyetlen maximális ideál $\tilde{R}$-ben. Az is világos, hogy $\tilde{M} \cap R = M$.

Mivel $\tilde{M}$ maximális ideál $\tilde{R}$-ben és persze $R \nsubseteq \tilde{M}$, ezért $R + \tilde{M} = \tilde{R}$. Ekkor viszont az első izomorfizmus-tétel miatt

$$F \cong R/M \cong R/(\tilde{M} \cap R) \cong (R + \tilde{M})/\tilde{M} = \tilde{R}/\tilde{M}.$$

□

Terjesszük ki a $*$ gyűrűhomomorfizmust az $\tilde{R}$ lokalizáltra is az $(\alpha/\beta)^* := \alpha^*/\beta^*$ módon. Könnyű ellenőrizni, hogy ezzel $* : \tilde{R} \to F$ szintén egy gyűrűhomomorfizmus. A továbbiakban jelölje $\mathbb{A}$ az algebrai számok testét.

7.14. Állítás. *A G csoport bármely $X : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ reprezentációja ekvivalens egy $\mathbb{A}$-reprezentációval, azaz létezik egy olyan $X' : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{A}}(V)$ reprezentáció, hogy minden $g \in G$ esetén az $X(g)$ hasonló egy $X'(g)$ mátrixhoz.*

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy a $\mathbb{C}$-karakterek összes eddig általunk felfedett tulajdonságával az $\mathbb{A}$-karakterek is rendelkeznek, hiszen csak azt használtuk ki, hogy $\operatorname{char}\mathbb{C} = 0$ és $\mathbb{C}$ algebrailag zárt. Ezek pedig $\mathbb{A}$-ra szintén igazak.

Mondhatjuk tehát, hogy egy G véges csoportnak k darab nem ekvivalens irreducibilis $\mathbb{A}$-reprezentációja van, ahol k a G konjugáltosztályainak száma. Továbbá $|G| = \sum_{i=1}^{k} n_i^2$ és az irreducibilis $\mathbb{A}$ karakterek *ortogonálisak.*

Ha a ζ irreducibilis $\mathbb{A}$-karaktert irreducibilis $\mathbb{C}$-karakterek összegére bontjuk, akkor mivel $|\operatorname{Irr}_{\mathbb{A}} G| = |\operatorname{Irr}_{\mathbb{C}} G| = k$, ezért $\zeta = m_i\chi_i$, ahol $\chi_i \in \operatorname{Irr}_{\mathbb{C}}$ és $m_i \geq 0$. Viszont az irreducibilis $\mathbb{A}$-karakterek fokainak négyzetösszege megegyezik $|G|$-vel, ezért $m_i = 1$.

Azt kaptuk, hogy a tetszőleges $\zeta \in \operatorname{Irr}_{\mathbb{A}} G$ megegyezik valamelyik $\chi_i \in \operatorname{Irr}_{\mathbb{C}} G$ karakterrel, és mivel speciálisan minden $\mathbb{A}$-karakter egy $\mathbb{C}$-karakter is, így ζ és χ_i karakterekhez tartozó reprezentációk ekvivalensek. $\square$

A következő tétel bizonyításához szükségünk lesz egy lemmára az algebrai számelméletből. A lemma bizonyítását elhagyjuk, mivel az további eszközök felépítését igényelné, amely a tárgyalásunkat más irányba terelné. A bizonyítás megtalálható Gabriel Navarro: Characters and Blocks of Finite Groups c. könyvében (2.5. Lemma.)

7.15. Lemma. *Tegyük fel, hogy $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{A}$ és I az R egy valódi ideálja. Ha az α_i elemek nem mindegyike 0, akkor található olyan $\beta \in \mathbb{A}$, hogy az $\alpha_i\beta$ elemek mindegyike R-beli és létezik köztük legalább egy olyan, amelyik nem az I-beli.* $\square$

7.16. Tétel. *Egy G csoport tetszőleges $\mathbb{C}$ feletti reprezentációja ekvivalens egy $\tilde{R}$ feletti reprezentációjával.*

Bizonyítás. A 7.14. Állítás szerint elegendő megmutatni, hogy G minden $\mathbb{A}$ feletti reprezentációja ekvivalens egy $\tilde{R}$ feletti reprezentációval. Legyen $X : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{A}}(V)$ a G egy reprezentációja. Ekkor V egy $\mathbb{A}G$-modulus. Tekintsük ennek egy $\mathbb{A}$ feletti $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bázisát. Jelölje W az alábbi részhalmazát V-nek

$$W = \langle (v_i)X(g) \mid i = 1, \ldots, n,\, g \in G\rangle_{\tilde{R}}\,.$$

A W egy végesen generált G-invariáns $\tilde{R}$-modulus. Emiatt $\operatorname{rad} W = WJ(\tilde{R}) = W\tilde{M}$ és $W\tilde{M} \ll W$.

A $W/W\tilde{M}$ egy végesen generált $\tilde{R}/\tilde{M} = F$-modulus, azaz egy véges dimenziós F-vektortér. Legyen $\{w_1, \ldots, w_t\}$ a $W/W\tilde{M}$ egy F-bázisának őséképe a W-ben. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{t} w_i\tilde{R} + W\tilde{M} = W,$$

mert a $\{w_i \mid 1 \leq i \leq t\}$ egy generátor rendszere a faktornak. Viszont $W\tilde{M} \ll \tilde{W}$, így $\sum_i w_i\tilde{R} = W$. Azonban $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset W$, így $\langle w_1, \ldots, w_t\rangle_{\mathbb{A}} = \langle v_1, \ldots, v_n\rangle_{\mathbb{A}}$.

Megmutatjuk, hogy a w_i-k függetlenek is. Tetszőleges $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \mathbb{A}$ nem mind 0 skalárok esetén, ha

$$\sum_{i=1}^{t} \alpha_i w_i = 0 \quad \overset{\exists\beta\,(7.15.)}{\Rightarrow} \quad \sum \beta\alpha_i w_i = 0,$$

ahol van olyan j index, amelyre $\beta\alpha_j \notin M$, vagyis amelyre $(\beta\alpha_j)^* \neq 0$. Akkor viszont $\sum(\beta\alpha_i)^* w_i = 0$ egy nem triviális lineáris kombináció F felett, ami ellentmond w_i választásának. Tehát a kiválasztott w_i-k a V-nek egy $\mathbb{A}$-bázisát adják.

Írjuk fel a G hatását ebben a bázisban! Tetszőleges $g \in G$ esetén $(w_i)X(g) \in W$, vagyis $(w_i)X(g) \in \sum_j w_j\tilde{R}$. Tehát ebben a bázisban $X(g)$ mátrixának csak $\tilde{R}$-beli elemei vannak. □

7.17. Megjegyzés. Ha X egy $\mathbb{C}$ feletti reprezentációja G-nek, akkor X hasonló egy $\mathbb{A}$ feletti X' reprezentációjával G-nek. Az $X'(g)$ mátrixokra elemenként alkalmazva a $*$ homomorfizmust egy F-feletti Y reprezentációhoz jutunk. Ez az eljárás a karakterekre is elvégezhető

$$\mathrm{tr}\ X(g) = \mathrm{tr}\ X'(g) \overset{*}{\longmapsto} \mathrm{tr}\,(X'(g)^*) = (\mathrm{tr}\ X'(g))^* = \mathrm{tr}\ Y(g),$$

sőt egyszerűbben $(\chi(g))^* = \mathrm{tr}\,(Y)$.

7.18. Definíció. Tegyük fel, hogy Y a G csoport egy F feletti reprezentációja és ψ az Y karaktere. Jelölje $\mathcal{S}$ a G csoport p-reguláris elemeit. Legyen a $g \in G$ rendje $o(g) = m$. Ekkor

$$Y(g) \sim \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & * & \dots & * \\ 0 & \varepsilon_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_n \end{bmatrix}, \quad \text{ahol } \forall i : \varepsilon_i^m = 1.$$

Minden i esetén létezik egyértelműen olyan $u_i \in R$, hogy $u_i^* = \varepsilon_i$. Az ψ-hez tartozó Brauer–karakter az a $\varphi : \mathcal{S} \to R \subset \mathbb{C}$ függvény, amelyre $\varphi(g) = \sum u_i$.

Az irreducibilis F-karakterek Brauer–karaktereit irreducibilis Brauer–karaktereknek nevezzük. Az irreducibilis Brauer–karakterek halmaza $\mathrm{IBr}\,G$.

7.19. Megjegyzés. A Brauer–karaktereket ahogy látjuk, (egyelőre) csak G-nek a p-reguláris elemein definiáltuk. Azonban a 7.7. Állítás alapján a φ Brauer–karakter ismeretében gond nélkül visszaállítható a neki megfelelő F-karakter.

Megjegyezzük, hogy a Brauer–karakterk konstrukciója csak abban az esetben jól definiált, ha az $M \leq R$ maximális ideál rögzített. Előfordul, hogy egy $\mathcal{S} \to \mathbb{R}$ függvény bizonyos $M \leq R$ maximális ideál esetén Brauer–karakter, más maximális ideált választva azonban nem.

7.20. Állítás. *Tegyük fel, hogy az $X : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ reprezentációhoz tartozó ($\mathbb{C}$)-karakter χ. Ekkor a $\hat{\chi} := \chi|_{\mathcal{S}}$ a G egy Brauer–karaktere.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy az X egy $\mathbb{R}$-feletti reprezentáció, és így vehetjük az X^* reprezentációt, amely már F feletti. Az X^* lesz az az F-reprezentáció, amelyhez tartozó Brauer–karakter $\hat{\chi}$. Hogy ezt belássuk, legyen $g \in \mathcal{S}$ tetszőleges, az $X(g)$ sajátértékei $u_1, \dots, u_n$, amelyek szükségképpen U-ban vannak. Így $X^*(g)$ nyoma $u_1^* + \dots + u_n^* \in F$. Tehát, ha az X^*-hoz rendelt Brauer–karakter φ, akkor $\varphi(g) = u_1 + \dots + u_n = \hat{\chi}(g)$. □

7.3. Brauer–karakterek felbontása

Az nyilvánvaló, hogy Brauer–karakterek összege is Brauer–karakter, hiszen vehetjük a karaktereket származtató F-reprezentációk (direkt) összegét, majd az ehhez tartozó Brauer–karaktert.

Fordítva, minden Brauer–karakter előáll irreducibilis Brauer–karakterek összegeként. Ehhez elég meggondolni, hogy ha kiindulunk egy φ Brauer–karakterből és egy a karaktert meghatározó Y reprezentációból, akkor Y előáll irreducibilis reprezentációk összegeként, és az egyes irreducibilis komponensekhez tartozó Brauer–karakterek összegeként visszakapjuk φ-t. A kérdés, hogy ez a felbontás egyértelmű-e.

7.21. Állítás. *Tetszőleges G csoport esetén* $\mathrm{IBr}\, G$ *elemei függetlenek* $\mathbb{C}$ *fölött.*

Bizonyítás. A G irreducibilis Brauer–karakterei legyenek $\varphi_1, \ldots, \varphi_t$. Indirekt tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^{t} \alpha_i \varphi_i = 0$ valamely $\alpha_i \in \mathbb{C}$ nem mind 0 együtthatókkal. Rendezzük az α_i skalárokat egy $\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_t]^{\mathrm{top}}$ mátrixba és legyen $\mathbf{\Phi}$ a

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \varphi_1(g_1) & \ldots & \varphi_t(g_1) \\ \varphi_1(g_2) & \ldots & \varphi_t(g_2) \\ & & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & & \end{bmatrix}$$

mátrix, ahol g_i-k az $\mathcal{S}$ elemeit jelölik. A feltétel szerint $\mathbf{\Phi}\alpha = 0$. Mivel minden a $\varphi_i(x)$ mátrixelemek mind algebrai számok, ezért feltehetjük, hogy az α_i együtthatók is mind algebrai számok. A 7.15. Lemma szerint, találhatunk olyan $\beta \in \mathbb{A}$ számot, amelyre $\beta\alpha_i$ mindegyike $\mathbb{R}$-beli, de van olyan j index, hogy $\beta\alpha_j \notin M$. Így pedig

$$\sum_{i=1}^{t} (\beta\alpha_i)^* \varphi_i(x)^* = 0$$

fennáll minden $x \in \mathcal{S}$, sőt a 7.7. Állítás miatt minden $x \in G$ esetén úgy, hogy a $(\beta\alpha_i)^*$ együtthatók közt van 0-tól különböző. Vegyük észre, hogy φ_i^* irreducibilis F-karakter, és ez így ellentmond a 7.3. Állításnak. □

7.22. Definíció. Tegyük fel, hogy χ a G csoport egy komplex karaktere. Akkor a χ-hez tartozó felbontási számok azok a $\mathrm{d}_{\chi\varphi}$ nem negatív egészek, amelyekre

$$\hat{\chi} = \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}\, G} \mathrm{d}_{\chi\varphi} \varphi.$$

A G csoport felbontási mátrixa $\mathbf{D} = [\mathrm{d}_{\chi\varphi}]_{\substack{\chi \in \mathrm{Irr}\, G \\ \varphi \in \mathrm{IBr}\, G}}$

7.23. Megjegyzés. Az eddigi vizsgálataink során szerzett információt az alábbi ábrával tudjuk szemléltetni.

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{R} \sim)\mathbb{C}\text{-reprezentációk} \arrow[r, "(-/\tilde{M})^*"] \arrow[d, "\mathrm{tr}"] & F\text{-reprezentációk} \arrow[d, dashed] \arrow[dr, "\mathrm{tr}"] & \\
\mathbb{C}\text{-karakterek} \arrow[u, dashed, bend left, "1-1"] \arrow[r, "\hat{}"] & \text{Brauer–karakterek} \arrow[r, "*"] & F\text{-karakterek} \arrow[l, dashed, bend left, "1-1"]
\end{tikzcd}$$

A diagram, ahol csak lehet *kommutatív* is.

7.24. Állítás. *Tetszőleges G csoport esetén az alábbi állítások teljesülnek.*

1., A p-reguláris osztályfüggvényeket generálja $\{\hat{\chi} \mid \chi \in \mathrm{Irr}\, G\}$*;*

2., az $\mathrm{IBr}\, G$ *egy bázisa a p-reguláris osztályfüggvények terének;*

3., $|\operatorname{IBr} G|$ *megegyezik a* p*-reguláris konjugáltosztályok számával;*

4., *minden* $\varphi \in \operatorname{IBr} G$ *esetén létezik olyan* $\chi \in \operatorname{Irr} G$*, hogy* $\mathrm{d}_{\chi\varphi} \neq 0$*;*

5., $\mathbf{D}$ *rangja* $|\operatorname{IBr} G|$.

Bizonyítás.

1., Legyen ϑ egy p-reguláris osztályfüggvény. Terjesszük ki ϑ-át egy tetszőleges G-n értelmezett osztályfüggvénnyé (akár $\xi \equiv 0$ definícióval a $G \setminus \mathcal{S}$-re). A ξ ekkor előáll mint irreducibilis $\mathbb{C}$-karakterek lineáris kombinációja, azaz írhatjuk, hogy $\xi = \sum a_\chi \chi$, valamilyen $a_\chi \in \mathbb{C}$ együtthatókkal és $\chi \in \operatorname{Irr} G$ karakterekkel. Akkor viszont $\vartheta = \hat{\xi} = \sum a_\chi \hat{\chi}$.

2., Azt már beláttuk, hogy $\operatorname{IBr} G$ generálja a Brauer–karaktereket, de ekkor speciálisan a $\{\hat{\chi} \mid \chi \in \operatorname{Irr} G\}$ elemeit is, mert ezek Brauer–karakterek. Az 1. állítás alapján $\operatorname{IBr} G$ generálja a p-reguláris osztályfüggvényeket is, továbbá $\operatorname{IBr} G$ függetlenségét a 7.21. Állítás mondja ki.

3., Ehhez elég a 2. állítás eredményéz összevetni azzal, hogy a p-reguláris osztályfüggvények dimenziója megegyezik a p-reguláris konjugáltosztályok számával.

4., Ha φ nem összeadandója semelyik $\hat{\chi}$-nak sem, akkor persze nem összeadandója ezek tetszőleges lineáris kombinációjának sem. Viszont $\varphi \in \langle \hat{\chi} \mid \chi \in \operatorname{Irr} G \rangle$, amelyet generál $\operatorname{IBr} G$, sőt ebben az indirekt feltevés szerint $\operatorname{IBr} G \setminus \{\varphi\}$ is, ami ellentmond φ irreducibilitásának.

5., A $\mathbf{D}$ mátrix sorai kigenerálják a $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ alakú sorvektorokat, hiszen $\varphi \in \rangle \hat{\chi} \mid \chi \in \operatorname{Irr} G \langle$. Emiatt a $\mathbf{D}$ rangja legalább akkora mint $|\operatorname{IBr} G|$, ami viszont az oszlopok száma. Tehát a $\mathbf{D}$ rangja ponrosan $|\operatorname{IBr} G|$.

□

7.25. Példa. Számítsuk ki az S_3 szimmetrikus csoport F-karaktereit és az azoknak megfelelő Brauer–karaktereket a $p = 2, 3$ esetben. Mivel a szimmetrikus csoportok karaktertáblája csak egész értékeket kap, az F-karakterek meghatározása az elemek modulo p maradékát véve megkapható.

Emlékeztetőül az S_3 (komplex) karaktertáblája

	1	(..)	(...)
1_{S_3}	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

A $p = 2$ esetben a 2-reguláris konjugáltosztályok az első és 2. oszlophoz tartozó osztályok. Így az F-karakterek a $p = 2$ esetben.

$p = 2$	1	(..)	(...)
1_{S_3}	1	1	1
χ_2	1	1	1
χ_3	0	0	1

Látjuk, hogy az első és a harmadik sorban szereplő karakterek függetlenek, a második sorban lévő megegyezik az elsővel. Most tekintsük a χ_i irreducibilis $\mathbb{C}$-karakterek megszorítását az első két oszlopra.

$\hat{\chi}$	1	$(\ldots)$
$\hat{1}_{S_3}$	1	1
$\hat{\chi}_2$	1	1
$\hat{\chi}_3$	0	1

Azt is meggondolhatjuk, hogy $\hat{\chi}_3$ irreducibilis. Ha nem volna az, akkor mivel másodfokú, felbomlana két (szükségképpen) elsőfokú irreducibilis karakter összegére. Viszont 1_G az egyetlen lineáris karakter F fölött, mert $|S_3 : A_3|/|P : A_3| = 1$, ahol P a G/G' egy $p = 2$-Sylow részcsoportjának ősképe S_3-ban. Tehát $\operatorname{IBr}_2 G = \{\hat{1}_G, \hat{\chi}_3\}$.

A $p = 3$ esetben:

$p = 3$	1	$(..)$	$(\ldots)$
1_G	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	-1	0	-1

szintén 2 független sor adódik (a 3. sor az első kettő összege). Az irreducibilis karakterek megszorítása

$p = 3$	1	$(..)$
$\hat{1}_G$	1	1
$\hat{\chi}_2$	1	-1
$\hat{\chi}_3$	-1	0

A $\operatorname{char} F = 3$ esetben a lineáris F-karakterek száma 2, ezért a $\hat{\chi}_3$ nem lehet irreducibilis. Viszont látjuk, hogy $\hat{1}_G$ és $\hat{\chi}_2$ lineárisan függetlenek, különböző lineáris (és így irreducibilis) F-karakterekhez tartoznak, ezért $\operatorname{IBr}_3 G = \{\hat{1}_G, \hat{\chi}_2\}$.

7.4. Az FG algebra blokkjai, blokkortogonalitások

7.26. Lemma. *Legyen A egy véges dimenziós algebra és P_i, P_j felbonthatatlan projektív A-modulusok. Legyen $S_i = P_i/\operatorname{rad} P_i$ a P_i teteje. Ekkor $\operatorname{Hom}_A(P_i, P_j)$ pontosan akkor nem 0, ha P_j-ben létezik S_i-vel izomorf kompozíciófaktor.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $0 \neq \varphi \in \operatorname{Hom}_A(P_i, P_j)$. Mivel P_i lokális, ezért $\ker \varphi \in \operatorname{rad} P_i$. A $0 \leq \operatorname{im} \varphi \leq P_j$ finomítható a P_j egy kompozícióláncává, amely tartalmazza $S_i \cong \operatorname{im} \varphi / \operatorname{im}(\operatorname{rad} P_i)$-t.

Fordítva, tegyük fel, hogy az S_i kompozíciófaktora P_j-nek. Akkor létezik olyan U, V részmodulus P_j-ben, hogy egyrészt $U \leq V$, másrészt $V/U \cong S_i$. Akkor viszont létezik egy $P_i \twoheadrightarrow U/V$ epimorfizmus is és a P_i univerzális tulajdonsága miatt

$$\begin{tikzcd} & P_i \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma"'] \arrow[d] \\ U \arrow[r, two heads] & U/V \end{tikzcd}$$

létezik egy $\gamma : P_i \to U \leq P_j$, amely szükségképpen nem 0. $\square$

7.27. Megjegyzés. Ha az A véges dimenziós P_i, P_j felbonthatatlan projektív modulusaira $\operatorname{Hom}_A(P_i, P_j) \neq 0$, akkor azt mondjuk, hogy P_i és P_j szomszédosak. Könnyű meggondolni, hogy ha A egy szimmetrikus algebra, akkor a szomszédosság egy szimmetrikus reláció.

Legyen φ a G csoport egy irreducibilis Brauer–karaketere, ekkor a φ-hez tartozik egy S_φ egyszerű F-modulus. Ez meghatározza FG-nek azt a felbonthatatlan P_φ projektív modulusát, amelynek teteje az S. A P_φ-hez tartozó *projektív karakter*

$$\Phi_\varphi = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} G} \mathrm{d}_{\chi\varphi}\chi,$$

illetve a φ-hez tartozó *projektív Brauer–karakter*

$$\hat{\Phi}_\varphi = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} G} \mathrm{d}_{\chi\varphi}\hat{\chi}.$$

Ezt felhasználva, ha $\mathbf{D}$ a G csoport felbontási mátrixa, akkor $\mathbf{C} = \mathbf{D}\mathbf{D}^\top$ az FG algebra Cartan– mátrixa, azaz az a mátrix, amely i. sorának j. eleme megadja, hogy P_i-ben hány darab S_j-vel izomorf kompozíciófaktor szerepel. Tehát $C_{i,j} = [P_i : S_j]$. Hogy ezt belássuk, számoljuk ki $\hat{\Phi}_{\varphi_i}$ irreducibilis Brauer–karakterekre való kanonikus felbontásának együtthatóit.

$$\hat{\Phi}_{\varphi_i} = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} G} \mathrm{d}_{\chi\varphi_i}\hat{\chi} = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} G} \mathrm{d}_{\chi\varphi_i} \left(\sum_{\varphi_j \in \operatorname{IBr} G} \mathrm{d}_{\chi\varphi_j} \right) = \sum_{\varphi_j \in \operatorname{IBr} G} \left(\sum_{\chi \in \operatorname{Irr} G} \underbrace{(\mathrm{d}_{\chi\varphi_i}\mathrm{d}_{\chi\varphi_j})}_{C_{i,j}} \varphi_j \right).$$

7.28. Példa. Határozzuk meg S_3 projektív Brauer–karaktereit és Cartan–mátrixát a $p = 2, 3$ esetekben!

A $p = 3$ esetben a csoport irreducibilis Brauer–karakterei az irreducibilis $\mathbb{C}$-karakterek megszorításai,

$p=3$	1	$(..)$
$\hat{1}_{S_3}$	1	1
$\hat{\chi}_2$	1	-1
$\hat{\chi}_3$	-1	0

mégpedig $\varphi_1 = \hat{1}_{S_3}$ és $\varphi_2 = \hat{\chi}_2$. A $\hat{\chi}_3$ pedig előáll mint $\varphi_1 + \varphi_2$. Így

$$\hat{\Phi}_{\varphi_i} = \hat{\chi}_i + \hat{\chi}_3 = 2\varphi_i + \varphi_{3-i} \quad i = 1, 2,$$

és az S_3 felbontási- és Cartan–mátrixa

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ez pont az, amit vártunk, hiszen azt már láttuk, hogy $\mathbb{F}_3 S_3$ izomorf egy olyan gráfalgebrával, amelynek Loewy–diagramja

$$\begin{matrix} 1 & & 2 \\ 2 & \oplus & 1 \\ 1 & & 2 \end{matrix}$$

Tekintsük most a $p = 2$ esetet. Ekkor FG-nek egy lineáris és egy másodfokú irreducibilis F-karaktere van. Ha $\varphi_1 = \hat{1}_{S_3}$, akkor $\Phi_{\varphi_1} = \hat{1}_{S_3} + \hat{\chi}_2 = 2\hat{1}_{S_3}$. Így az

$\hat{1}_{S_3}$-hoz tartozó projektív modulus 2-dimenziós és két darab egymással izomorf egyszerű kompozíciófaktora van. A másik $\varphi_2 = \hat{\chi}_3$ irreducibilis modulusának projektív Brauer–karaktere önmaga, így a neki megfelelő felbonthatatlan projektív modulus 2-dimenziós és egy darab egyszerű kompozíciófaktora van. Vagyis ekkor

$$FG \cong A \times B, \quad \text{ahol} \quad A_A \cong \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \quad \text{és} \quad B \cong M_2(F).$$

Legyen $A = FG$ és vegyük az A_A egy felbonthatatlan projetkívekre való

$$A_A = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n$$

felbontását. A P_1 komponeneseket csoportosítsuk aszerint, hogy $\mathrm{Hom}_A(P_i, P_j) = 0$-e. Azaz P_i és P_j egy blokkban van, ha van köztük nem homomorfizmusok egy nem 0 szorzata. (Megjegyezzük, hogy a blokkok e definíciója megegyezik a korábbi definícióval, mert az FG csoportalgebra szimmetrikus.)

Az A algebra blokkjait a felbontási számokkal is kifejezhetjük. Definiálunk egy páros gráfot, a G (p prímhez tartozó) Brauer–gráfját. A gráf csúcshalmazának két osztálya legyen az $\mathrm{Irr}\, G$, illetve az $\mathrm{IBr}\, G$. Egy $\chi \in \mathrm{Irr}\, G$ és $\varphi \in \mathrm{IBr}$ pontpárt akkor kössön össze él, ha $\mathrm{d}_{\chi\varphi} \neq 0$. Ekkor, ha $B \subseteq \mathrm{Irr}\, G \cup \mathrm{IBr}\, G$ egy összefüggő komponense, akkor B az algebra egy blokkját határozza meg.

7.29. Állítás. *Tegyük fel, hogy a B egy összefüggő komponense a Brauer–gráfnak. Ekkor a B blokkban szereplő* IBr*-beli karakterek éppen az FG egy blokkjának tetejéhez tartozó irreducibili Brauer–karakterek.*

Bizonyítás. A $\varphi, \mu \in \mathrm{IBr}\, G$-hez tartozó felbonthatatlan projektív modulusok pontosan akkor szomszédosak, ha φ által meghatározott felbonthatatlan projektív F-modulus teteje egy kompozíciófaktora a μ-höz tartozó felbonthatatlan projektív modulusnak. Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha létezik olyan $\chi \in \mathrm{Irr}\, G$, amelyre a $\mathrm{d}_{\chi\mu}\mathrm{d}_{\chi\varphi} \neq 0$ (hiszen $c_{\mu,\varphi} = \sum \mathrm{d}_{\chi\mu}\mathrm{d}_{\chi\varphi}$), vagyis pontosan akkor, ha van olyan $\chi \in \mathrm{Irr}\, G$, hogy a χ-t él köti φ-vel és μ-vel is. □

Tegyük fel, hogy $\mathcal{K} \subset G$ egy konjugáltosztály, amelyhez tartozó osztályösszeg $K = \sum_{g \in \mathcal{K}} g$. Ha X egy irreducibilis $\mathbb{C}$-reprezentációja G-nek, melynek karaktere $\chi \in \mathrm{Irr}\, G$, akkor $K \in \mathrm{Cen}(\mathbb{C}G)$ miatt $X(K) = \omega_\chi(K) \cdot I$. Láttuk, hogy $\omega_\chi(K) = \chi(g) \cdot |\mathcal{K}|/\chi(1)$ egy algebrai egész, így vehetjük a $*$ általi képét.

7.30. Állítás. *Legyen φ a G egy irreducibilis Brauer–karaktere. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{K}$ a G egy p-reguláris konjugáltosztálya és K a hozzá tartozó osztályfüggvény. Ekkor minden olyan $\chi \in \mathrm{Irr}\, G$ esetén, amelyre $\mathrm{d}_{\chi\varphi} \neq 0$ az $\omega_\chi(K)^*$ értéke ugyanaz.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\varphi \in \mathrm{IBr}\, G$ és $\chi \in \mathrm{Irr}\, G$ olyan, hogy $\mathrm{d}_{\chi\varphi} \neq 0$. Legyen X egy a χ-hez tartozó reprezentáció. Ekkor

$$X(K) = \omega_\chi(K) \cdot I, \quad \text{amiből} \quad X^*(K) = \omega_\chi(K)^* \cdot I.$$

A $\mathrm{d}_{\chi\varphi} \neq 0$ feltétel szerint az $X^* : G \to \mathrm{GL}_F(V)$ reprezentáció által meghatározott V (FG)-modulusnak van egy φ-hez tartozó V' kompozíciófaktora. Ám $X^*(K)$ hatása V-n egy $\omega_\chi(K)^*$ skalárral való szorzás, és így speciálisan a φ-hez tartozó V' kompozíciófaktoron is.

Ha Y egy olyan F-reprezentáció, amelyhez a φ Brauer–karakter tartozik, akkor $Y(K) = \omega_\chi(K)^* \cdot I$, amely valóban csak a φ-től és K-tól függ. □

7.31. Jelölés. Rögzítsünk egy $\varphi \in \mathrm{IBr}\, G$ irreducibilis Brauer–karaktert és a G-nek egy p-reguláris $\mathcal{K}$ konjugáltosztályát, amelyhez tartozó osztályösszeget jelölje K. Ekkor a $\{\chi \in \mathrm{Irr}\, G \mid \mathrm{d}_{\chi\varphi} \neq 0\}$ halmaz beli karakterekhez tartozó $\omega_\chi(K)^*$ állandót jelölje $\lambda_\varphi(K)$.

7.32. Tétel. *A μ és ϑ irreducibilis Brauer–karakterek pontosan akkor vannak egy blokkban, ha bármely p-reguláris K osztályösszegű konjugáltosztály esetén $\lambda_\vartheta(K) = \lambda_\mu(K)$.* □

7.33. Példa. Határozzuk meg S_3 blokkjait a $p = 2, 3$ moduláris esetekben! Az S_3 komplex karaktertáblája

	1	(..)	(...)
1_{S_3}	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

amiből leolvashatjuk a csoport „ω-tábláját”, azaz a konjugáltosztályokhoz tartozó $\chi(g)|\mathcal{K}|/\chi(1)$ értékeket.

ω	1	(..)	(...)
1_{S_3}	1	3	2
χ_2	1	-3	2
χ_3	1	0	-1

Az ω-táblát mod-2, illetve mod-3 véve (vagyis alkalmazva az elemeire az $*$-ot)

$p = 2$	1	(...)
1_{S_3}	1	0
χ_2	1	0
χ_3	1	1

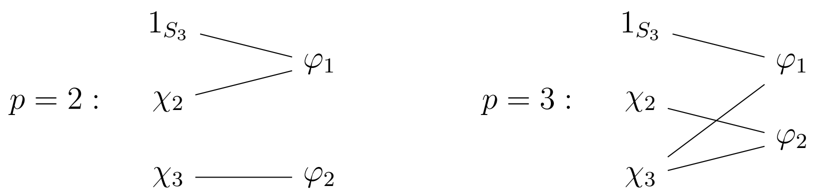
$\hat{1}_{S_3} = \varphi_1$
$\hat{\chi}_2 = \varphi_1$
$\hat{\chi}_3 = \varphi_2$

és

$p = 3$	1	(..)
1_{S_3}	1	0
χ_2	1	0
χ_3	1	0

$\hat{1}_{S_3} = \varphi_1$
$\hat{\chi}_2 = \varphi_2$
$\hat{\chi}_3 = \varphi_1 + \varphi_2$

táblákhoz jutunk. Látjuk, hogy a $p = 2$ esetben az 1_{S_3} és a χ_1 karakterek kerülnek egy blokkba és χ_3 pedig egy másikba. A $p = 3$ esetben pedig mindhárom irreducibilis $\mathbb{C}$-karakterhez ugyanazok az ω^* értékek tartoznak, tehát ebben az esetben a Brauer–gráf összefüggő. A két Brauer–gráf az alábbi.



7.5. Blokkortogonalitások

Továbbra is ragaszkodunk az eddigi jelöléseinkhez. Tehát ha $\chi \in \mathrm{Irr}\, G$, akkor $\mathrm{d}_{\chi\varphi}$ a χ karakter $\varphi \in \mathrm{IBr}\, G$-re vonatkozó felbontási száma, azaz amelyekkel

$$\hat{\chi} = \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}\, G} \mathrm{d}_{\chi\varphi} \varphi.$$

Egy rögzített φ irreducibilis Brauer–karakter egyértelműen meghatároz egy irreducibilis F-karaktert, amelyhez tartozik egy egyszerű FG-modulus S, és az S-hez tartozik egy felbonthatatlan projektív FG-modulus, amelynek teteje éppen S. Ehhez, a projektív modulushoz tartozó F-karakter

$$\Phi_\varphi = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} G} \mathrm{d}_{\chi\varphi} \chi,$$

illetve a hozzá tartozó Brauer–karakter

$$\hat{\Phi}_\varphi = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} G} \mathrm{d}_{\chi\varphi} \hat{\chi}.$$

7.34. Lemma. *Tegyük fel, hogy $\mathcal{B}$ a G Brauer–gráfjában néhány összefüggő komponens uniója. Legyen $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap \operatorname{Irr} G$ és $\mathcal{A}' = \mathcal{B} \cap \operatorname{IBr} G$. Legyenek $x, y \in G$ tetszőleges p-reguláris elemek. Ekkor*

$$\sum_{\chi \in \mathcal{A}} \chi(x)\overline{\chi(g)} = \sum_{\varphi \in \mathcal{A}'} \varphi(x)\overline{\Phi_\varphi(y)}$$

Bizonyítás. Legyen $\chi \in \mathcal{A}$ tetszőleges. Ekkor $\mathrm{d}_{\chi\varphi} = 0$ minden olyan φ-re, amely $\operatorname{IBr} G \setminus \mathcal{A}'$-ből való. Továbbá, ha $\varphi \in \mathcal{A}'$, akkor

$$\Phi_\varphi = \sum_{\chi \in \mathcal{A}} \mathrm{d}_{\chi\varphi} \chi,$$

mert $\mathrm{d}_{\zeta\varphi} = 0$ minden $\operatorname{Irr} G \setminus \mathcal{A}$-beli karakterre. Ezek alapján

$$\sum_{\chi \in \mathcal{A}} \chi(x)\overline{\chi(y)} = \sum_{\chi \in \mathcal{A}} \sum_{\varphi \in \mathcal{A}'} \mathrm{d}_{\chi\varphi} \varphi(x)\overline{\chi(y)} = \sum_{\varphi \in \mathcal{A}'} \varphi(x)\overline{\Phi_\varphi(y)}.$$

□

7.35. Következmény. *Egy tetszőleges $\varphi \in \operatorname{IBr} G$ karakterre az alábbiak teljesülnek.*

1., Ha $p \mid o(y)$, akkor $\Phi_\varphi(y) = 0$.

2., Ha $P \in \operatorname{Syl}_p(G)$, akkor $|P| \mid \Phi_\varphi(1)$.

Bizonyítás.

1., Alkalmazzuk a 7.34. Lemmát az összes blokkra, és amit így kapunk vonjuk össze. Ezzel bármely $x \in \mathcal{S}$ és $y \notin S$ esetén

$$0 = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} G} \chi(x)\overline{\chi(y)} = \sum_{\varphi \in \operatorname{IBr} G} \varphi(y)\overline{\Phi_\varphi(y)}.$$

Tehát egy rögzített $y \in G\mathcal{S}$ és egy tetszőleges $x \in \mathcal{S}$ elemre a jobb oldal 0, vagyis a $\sum_{\varphi \in \operatorname{IBr} G} \overline{\Phi_\varphi(y)}\varphi$ a 0 karakter. A Brauer–karakterek függetlensége miatt ebből $\Phi_\varphi(y) = 0$ következik.

2., Legyen $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, a φ egy irreducibilis Brauer–karakter és vezessük be az alábbi jelölést.

$$(\Phi_\varphi)_P(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in P \setminus \{1\}; \\ \Phi_\varphi(1), & \text{különben.} \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy ezzel $(\Phi_\varphi)_P = a \cdot \varrho_P$, ahol ϱ_P a P reguláris karaktere. Emiat

$$[(\Phi_\varphi)_P, 1_P] = [a \cdot \varrho_P, 1_P] = a \in \mathbb{N}, \text{ mert } (\Phi_\varphi)_P \text{ egy karakter.}$$

Emellett $\Phi_\varphi(1) = (\Phi_\varphi)_P(1) = a\varrho_P(1) = a|P|$.

□

7.36. Tétel (Gyenge blokkortogonalitás)**.** *Tegyük fel az $x, y \in G$ elemekről, hogy $x \in S$ és $y \notin S$. Legyen $\mathcal{B}$ a G egy blokkja. Ekkor*

$$\sum_{\chi \in \mathcal{B} \cap \mathrm{Irr}\, G} \chi(x)\overline{\chi(y)} = 0.$$

Bizonyítás. Az eddigiekből könnyen következik, hiszen

$$\sum_{\chi \in \mathcal{B} \cap \mathrm{Irr}\, G} \chi(x)\overline{\chi(y)} \overset{7.34}{=\!=} \sum_{\chi \in \mathcal{B} \cap \mathrm{Irr}\, G} \chi(x) \underbrace{\overline{\Phi_\varphi(y)}}_{\substack{=0, \text{ mert} \\ p \mid o(y) \\ (7.35)}} = 0.$$

□

7.37. Tétel ((Erős) blokkortogonalitás)**.** *Legyen $\mathcal{B}$ a G egy blokkja és tegyük fel, hogy az $x, y \in G$ elemek p-reguláris részei nem konjugáltak. Ekkor*

$$\sum_{\chi \in \mathcal{B} \cap \mathrm{Irr}\, G} \chi(x)\overline{\chi(y)} = 0.$$

□

Azt rögtön látjuk, hogy az erős blokkortogonalitásból következik a gyenge blokkortogonalitás, és összevetve ezt a II. ortogonalitási relációval láthatjuk az analógiát, illetve azt, hogy miért is hasznos a moduláris esetben a G blokkjainak vizsgálata. Az erősebb tételt itt nem bizonyítjuk, ehelyett ismertetjük a G blokkjainak további tulajdonságait és alkalmazásként bizonyítjuk Brauer $p^\alpha q^\beta r$-rendű egyszerű csoportokról szóló tételét.

7.38. Definíció. Legyen χ egy irreducibilis karakter. Azt mondjuk, hogy a χ defektje d, ha d a legnagyobb olyan egész szám, hogy $p^d \mid |G|/\chi(1)$.

7.39. Tétel. *Legyen a $\mathcal{B}$ a G egy blokkja. Ekkor*

$$|\mathcal{B} \cap \mathrm{Irr}\, G| \leq |\mathcal{B} \cap \mathrm{Irr}\, G|,$$

továbbá egyenlőség pontosan akkor van, ha bármely $\chi \in \mathcal{B} \cap \mathrm{Irr}\, G$ esetén a χ defektje 0, sőt ebben az esetben $\mathcal{B} \cap \mathrm{Irr}\, G = \{\chi\}$ és $\mathcal{B} \cap \mathrm{IBr}\, G = \{\hat{\chi}\}$.

Bizonyítás. Csak az állítás első részét látjuk be. Tekintsük a G felbontási mátrixát, $\mathbf{D}$-t. Vegyük a mátrixnak a $\mathcal{B}$ blokkhoz tartozó sorait és oszlopait, legyen ezek metszete $\mathbf{D}_{\mathcal{B}}$. A kijelölt oszlopok, illetve sorok $\mathbf{D}_{\mathcal{B}}$-t elkerülő sorai, illetve oszlopai csak 0-t tartalmaznak.

Tudjuk, hogy D oszlopai független, emiatt a $\mathbf{D}_{\mathcal{B}}$ oszlopai is függetlenek. Így a $\mathbf{D}_{\mathcal{B}}$ rangja legalább $|\operatorname{IBr} G \cap \mathcal{B}|$, másrészt a $\mathbf{D}_{\mathcal{B}}$ rangje legfeljebb a sorainak száma, vagyis

$$|\operatorname{IBr} G \cap \mathcal{B}| \leq \operatorname{rang} \mathbf{D}_{\mathcal{B}} \leq |\operatorname{Irr} G \cap \mathcal{B}|.$$

□

7.40. Tétel (Brauer)**.** *Legyen a G egyszerű csoport rendje $|G| = p^\alpha q^\beta r$, ahol p, q, r különböző prímek. Ekkor az $S \in \operatorname{Syl}_r(G)$ centralizátora önmaga, vagyis $\operatorname{C}_G(S) = S$.*

Bizonyítás. A bizonyítást több lépésben végezzük el.

1., Ha $\chi \in \operatorname{Irr} G$ egy 0 defektű karakter, akkor minden $g \notin \mathcal{S}$ esetén $\chi(g) = 0$, ugyanis a χ-hez tartozó blokk ekkor $\{\chi, \hat{\chi}\}$ és a gyenge blokkortogonalitás szerint $\chi(1)\overline{\chi(g)} = 0$.

2., Belátjuk, hogy ha G egy egyszerű nem Abel–csoport, akkor minde p esetén az 1_G-hez tartozó (fő)blokkban csak 1_G foka p-hatványrendű. Tegyük fel indirekt, hogy nem így van, legyen $1_G, \chi \in \mathcal{B}$ és $\chi(1) = p^t$. Mivel 1_G és χ egy blokkban vannak, ezért $\omega_{1_G}(K) \equiv \omega_\chi(K) \pmod{M}$, ahol K egy tetszőleges konjugáltosztályhoz tartozó osztályösszeg. Vagyis, ha $\mathcal{K}$ a K-hoz tartozó konjugáltosztály, akkor

$$\frac{|\mathcal{K}|\chi(g)}{\chi(1)} \equiv \frac{|\mathcal{K}| 1_G(g)}{1_G(1)} \equiv |\mathcal{K}| \pmod{M}. \tag{16}$$

Legyen $P \in \operatorname{Syl}_p(G)$. Ha $|P| = 1$, vagyis ha $p \nmid |G|$, akkor $\chi(1) \mid |G|$ miatt $\chi(1) = 1$. Ám G nem Abel, ezért nincs 1_G-től különböző lineáris karaktere, tehát $\chi = 1_G$, ami ellentmondás. A fennmaradó esetben $|P| > 1$. Ekkor létezik $1 \neq g \in \operatorname{Z}(P)$. Erre a g-re teljesül, hogy $P \leq \operatorname{C}_G(g)$, amiből viszont $p \nmid \mathcal{K}(g)$ következik. A Burnside–tétel szerint $\chi(g)$ vagy 0, vagy 1. Utóbbi nem lehet, hiszen G egyszerű és $g \neq 1$. Viszont $\chi(g) = 0$ ellentmond (16) kongruenciának, mert $|\mathcal{K}| \not\equiv 0 \pmod{M}$, hiszen $p \nmid |\mathcal{K}|$.

3., Indirekt tegyük fel, hogy $\operatorname{C}_G(S) > S$. Az biztos, hogy $|\operatorname{C}_G(S) : S|$ osztható p, q közül legalább az egyikkel (különben $\operatorname{C}_G(S) = G$, vagyis $S \leq \operatorname{Z}(G)$). Akkor viszont $\operatorname{C}_G(S)$-ben van p-ed, vagy q-adrendű elem, sőt van pr vagy qr rendű elem is. Feltehetjük, hogy $x \in \operatorname{C}_G(S)$ olyan, hogy $o(x) = pr$. Legyen a G főblokkja $\mathcal{B}$. A gyenge blokkortogonalitás miatt

$$0 = \sum_{\mathcal{B} \cap \operatorname{Irr} G} \chi(1)\overline{\chi(x)} = 1_G(x) + \sum_{\substack{\chi \in \operatorname{Irr} G \cap \mathcal{B} \\ q \mid \chi(1)}} \chi(1)\overline{\chi(x)} + \sum_{\substack{\chi \in \operatorname{Irr} G \cap \mathcal{B} \\ q \nmid \chi(1) \\ \chi \neq 1_G}} \chi(1)\overline{\chi(x)}.$$

A harmadik tag 0, mert ha $\chi \in \operatorname{Irr} G \cap \mathcal{B} \setminus \{1_g\}$ és $q \nmid \chi(1)$, akkor $r \mid \chi(1)$ a 2. pont miatt. De χ akkor r-re nézve 0 defektű karakter, így az 1. pont miatt $\chi(x) = 0$, hiszen $p \mid o(x)$.

A második tag viszont $q \cdot \alpha$ alakú, ahol α algebrai egész, ami ellentmondás, hiszen az egyenletet rendezve $-1/q = \alpha$ adódik de $-1/q$ nem lehet algebrai egész.

$\square$