Poincaré egyenlőtlenség vizsgálata kölcsönható Markov folyamatokra

Mánfay Máté

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2008

Konzulens: Dr. Fritz József

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Differenciálegyenletek tanszék

Poincaré egyenlőtlenség vizsgálata kölcsönható Markov folyamatokra

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Dolgozatomban a Poincaré egyenlőtlenséget vizsgálom kölcsönható Markov folyamatokra, ez az egyenlőtlenség kulcsfontosságú szerepet tölt be részecskerendszerek hidrodinamikai viselkedésének vizsgálatakor, többek közt a spektrális rés nagyságára vonatkozó következtetéseket vonhatunk le. Maga az egyenlőtlenség

$$\sum_{\omega\in\Omega} \lambda(\omega)\varphi^2(\omega) \leq -c \sum_{\omega\in\Omega} \lambda(\omega)\varphi(\omega)L\varphi(\omega)$$

alakot ölti, ahol Ω az állapotteret, λ a stacionárius mértéket és L a folyamat generátorát jelöli.

A vizsgált modelljeink mindegyike fizikai indíttatású. Képzeljük el, hogy egy egyenes mentén n szomszédos rácsponton részecskék helyezkednek el. Legegyszerűbb modellünkben egy fajta részecske van, így egy adott helyen vagy van részecske (1-essel fogjuk jelölni) vagy nincs részecske (0-ával fogjuk jelölni). A Markov folyamatot az jelenteni, hogy a részecskék rácspontról rácspontra ugrálnak. Gondolhatunk erre a folytonos Markov folyamatra úgy is, hogy a részecskék és az üres helyek egy n pontú teljes gráf csúcsaiban helyezkednek el és minden élen van egy óra, melyek egymástól függetlenül 1 paraméterű exponenciális eloszlás szerint csörögnek, és amelyik élen megcsörren az óra ott végrehajtjuk az állapotok cseréjét. Természetesen a modell továbbfejleszthető: kiköthetjük, hogy a részecskék egy erőtér hatására csak egy adott irányba tudnak mozogni és csak a szomszédos helyre ugorhatnak, ami már egy sokkal valósághűbb megközelítés. Ezzel a modellel fogok foglalkozni dolgozatom első részében, az ott leírtak T. Funaki, K. Uchiyama és H.T. Yau cikkére [1] épülnek.

A második tárgyalt modellben immár nem egy-, hanem kétfajta részecskével dolgozunk, ahol a folyamatot újfent a részecskék véletlen cseréje jelenti. Erre az esetre bizonyítom a Poincaré egyenlőtlenséget, a dolgozat fő eredménye a **4.1** Tétel. Ez a modell ha úgy tetszik, már pozitív és negatív töltésű részecskéket is tartalmaz és látni fogjuk, hogy vizsgálata lényegesen bonyolultabb a kétállapotú modellnél.

Végül kitérünk a párkeltéses-irtásos folyamatra is, ahol már az egyes típusú részecskék száma is változhat, úgymond két ellentétes töltésű részecske kiolthatja egymást és fordítva.

2. Poincaré egyenlőtlenség és a spektrális rés

A modellek pontos definiálása előtt vizsgáljuk meg, hogy a Poincaré egyenlőtlenség milyen alakot ölt folytonos Markov folyamatra véges állapottéren. Dolgozatomban első két fejezetében vizsgált modellekben az egyes típusú részecskék száma a folyamat során nem változik, csak ugrások történnek bizonyos rátákkal. Legyen L a folyamat infinitezimális generátora, ami mátrix alakban a következő:

$$L_{\omega,\sigma} = \begin{cases} r(\omega,\sigma) & \text{ha } \omega \neq \sigma \\ -r(\omega) & \text{ha } \omega = \sigma \end{cases}$$

ahol $r(\omega) = \sum_{\sigma \neq \omega} r(\omega,\sigma)$, és $r(\omega,\sigma)$ jelenti a megfelelő ugrási rátát. Folyamataink tipikusan nem reverzibilisek, így szimmetrizálást fogunk alkalmazni. Jelölje $< \varphi, \psi >$ a λ stacionárius mértékhez rendelt valós L^2 tér skaláris szorzatát:

$$< \varphi, \psi >= \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega)\varphi(\omega)\psi(\omega)\,,$$

ekkor a Dirichlet forma $\mathsf{D}(\varphi) =< \varphi, -L\varphi >$ (ahol φ az állapottér elemein ható valós értékű függvény), ez szerepel a Poincaré egyenlőtlenség jobb oldalán. Ha most L^* jelöli L operátor adjungáltját, akkor $-< \varphi, L\varphi >= - < \varphi, L^*\varphi >$ és így

$$- < \varphi, L\varphi >= -\frac{1}{2} < \varphi, (L + L^*)\varphi >$$

Jelöljük $r^*(\omega,\sigma)$-al az L^* generátorral rendelkező folyamat ugrási rátáit. Ismert, hogy ekkor

$$r^*(\omega,\sigma) = \frac{\lambda(\sigma)r(\sigma,\omega)}{\lambda(\omega)}$$

A tárgyalt folyamataink mindegyikében az egyenletes eloszlás lesz a stacionárius, így $\lambda(\omega) = \lambda(\sigma)$ felhasználásával

$$r^*(\omega,\sigma) = r(\sigma,\omega)$$

adódik. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy az L^* generátorú folyamat az L generátorú folyamat időbeni megfordítása.

Továbbá jól ismert, hogy reverzibilis folyamatok esetén a Poincaré egyenlőtlenség a

$$\sum_{\omega\in\Omega} \lambda(\omega)\varphi^2(\omega) \leq c \sum_{\omega,\sigma\in\Omega} \lambda(\omega) r(\omega,\sigma)(\varphi(\sigma) - \varphi(\omega))^2$$

alakot ölti.

2.1. Definíció. *Legyen X_t folytonos idejű Markov lánc Ω véges állapottéren λ stacionárius eloszlással, ekkor a folyamat spektrális rése:*

$$\gamma = \inf \left\{ \frac{\mathsf{D}\,(\varphi)}{Var_\lambda(\varphi)} \middle|\ \varphi \in L^2(\Omega,\lambda),\ \mathbb{E}_\lambda \varphi = 0,\ Var_\lambda(\varphi) \neq 0 \right\}$$

Vegyük észre, hogy a spektrális rés azon legkisebb C konstans reciprokával egyenlő, melyre

$$Var_\lambda(\varphi) \leq C\mathsf{D}\,(\varphi)$$

ezért van fontos szerepe a Poincaré egyenlőtlenségnek a spektrális rés becslésénél. Továbbá jól ismert, hogy a stacionárius eloszláshoz való konvergencia sebessége pedig a spektrális rés segítségével becsülhető, így tulajdonképpen a Poincaré egyenlőtlenség vizsgálata egyben az "állandósult" állapot elérésének gyorsaságát is vizsgálja.

3. A kétállapotú kizárásos folyamat

3.1. A kétállapotú modell

A bevezetőben vázolt modellt most pontosan definiáljuk. A részecskéink egy dimenzióban mozognak, egy periodikus szakaszon: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, így a konfigurációkat egy n-hosszú vektorral reprezentáljuk: $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$.A konfigurációs tér álljon az olyan n hosszú 0,1 sorozatokból, melyek adott m darab egyest tartalmaznak. Vagyis $\Omega_m^n = \{\omega \mid \sum \omega_k = m\}$ ahol ω_k az ω k. koordinátája. A folyamat generátora a következő:

$$L\varphi = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(1-\omega_{k+1})\big(\varphi(\omega^{(k,k+1)})) - \varphi(\omega)\big)$$

Ahol ω^b jelentse azt a konfigurációt amit ω-ból kapunk, ha $b = (k,l)$ koordinátákon lévő állapotokat felcseréljük, vagyis $(\omega^{(k,l)})_k = \omega_l$ és $(\omega^{(k,l)})_l = \omega_k$, ami ugyebár azt jelenti, hogy a részecskék egy erőtér hatására jobbra haladnak. Legyen $\varphi : \Omega_m^n \to \mathbb{R}$, feltehető, hogy $\mathbb{E}\varphi = 0$. Legyen továbbá λ az a valószínűségi mérték az Ω_m^n téren ami ez egyenletes elsozlást adja, így $\lambda(\omega) = 1/\binom{n}{m}$, itt említem meg, hogy ez tulajdonképpen egy feltételes eloszlás, ahol a feltételt az egyesek száma jelenti.

3.1. Állítás. *A fent definiált folyamatra a λ valószínűségi mérték stacionárius.*

Bizonyítás:

Igazolnunk kell, hogy $\sum_{\omega\in\Omega_m^n} L\varphi(\omega)\lambda(\omega) = 0$. A folyamat L generátorának, és λ mértéknek a definíciói szerint:

$$\sum_{\omega\in\Omega_m^n} L\varphi(\omega)\lambda(\omega) = \lambda(\omega) \sum_{\omega\in\Omega_m^n} \sum_{k=1}^{n} \omega_k(1-\omega_{k+1})\big(\varphi(\omega^{(k,k+1)})) - \varphi(\omega)\big) =$$

$$= \lambda(\omega) \sum_{\omega \in \Omega_m^n} \sum_{k=1}^{n} \big(\omega_{k+1}(1-\omega_k) - \omega_k(1-\omega_{k+1})\big)\varphi(\omega) =$$

$$= \lambda(\omega) \sum_{\omega \in \Omega_m^n} (\omega_{n+1} - \omega_1)\varphi(\omega) = 0$$

Hiszen $\omega_{n+1} = \omega_1$, így λ valóban stacionárius. $\square$

3.2. Poincaré egyenlőtlenség vizsgálata

Most már rátérhetünk a Poincaré egyenlőtlenség bizonyítására a kizárásos modellre. Először egy könnyebben kezelhető folyamatra igazoljuk az egyenlőtlenséget, arra amikor a $(1,0) \to (0,1)$ cseréken kívűl a $(0,1) \to (1,0)$ csere is megengedett. Vagyis az előző részben leírtak szerint $\frac{L+L^*}{2}$ generátorral rendelkező folyamatot vizsgáljuk.

$$\left(\frac{L+L^*}{2}\right)\varphi = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\big(\omega_k(1-\omega_{k+1}) + \omega_{k+1}(1-\omega_k)\big)\big(\varphi(\omega^{(k,k+1)})) - \varphi(\omega)\big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\big(\omega_{k+1} - \omega_k\big)^2\big(\varphi(\omega^{(k,k+1)})) - \varphi(\omega)\big)$$

Tehát ebben a folyamatban a pozitív töltésű részecskék jobbra és balra is ugorhatnak. Továbbá a fentiek szerint, ha erre a folyamatra bizonyítjuk a Poincaré egyenlőtlenséget, akkor egyben az asszimetrikus, nem reverzibilis folyamatra is igazoltuk, hiszen ezt a Dirichlet forma átalakításából kaptuk. A bizonyítás első, egyben legfontosabb részében még távoli cseréket is megengedünk, majd ezután redukáljuk a megoldást a szomszédos cserékre.

3.1. Tétel. *[1]*

Minden $\varphi : \Omega_m^n \to \mathbb{R}$ *függvény esetén, melyre* $\mathbb{E}\varphi = 0$, *teljesűl a Poincaré egyenlőtlenség:*

$$\sum_{\omega \in \Omega_m^n} \lambda(\omega)\varphi^2(\omega) \leq \frac{1}{4n} \sum_{\omega \in \Omega_m^n, b \in B} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2 \lambda(\omega)$$

ahol $B = \{(k,l) | 1 \leq k, l \leq n\}$ *a cserék halmaza.*

Bizonyítás:

Nyilvánvaló, hogy $\omega_k = \omega_l$ és $b = (k,l)$ esetén $(\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2 = 0$, így jobb oldalon csak a tényleges cserékkel kell törődnünk, amik meg is változtatják a konfigurációt. Továbbá

$$\sum_{x \in \Omega_m^n} \lambda(x)\varphi^2(x) = \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega_m^n} \sum_{\sigma \in \Omega_m^n} \lambda(\omega)\lambda(\sigma)(\varphi(\omega) - \varphi(\sigma))^2$$

egyszerű számolással adódik felhasználva, hogy $\mathbb{E}\varphi = 0$.

$$A_k := \{(\omega, \sigma) \in \Omega_m^n \times \Omega_m^n | \sharp\{i | \omega_i \neq \sigma_i\} = 2k\}$$

Vagyis A_k jelöli azon konfigurációpárok halmazát, melyek pontosan $2k$ helyen térnek el egymástól.

k=1-re:

$$\frac{1}{2} \sum_{(\omega,\sigma) \in A_1} \lambda(\omega)\lambda(\sigma)(\varphi(\omega) - \varphi(\sigma))^2 = \frac{1}{4} \binom{n}{m}^{-1} \sum_{\omega \in \Omega_m^n, b} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2 \lambda(\omega)$$

Továbbá egy α konfigurációból β konfiguracióba vezető út legyen olyan α-ban kezdődő és β-ban végződő konfiguraciók sorozata, melyek a lehető legrövidebbek, és a szomszédosak egy cserével egymásba vihetők. Adott α,β párra a köztük vezető utak halmazát jelöljük $S_{\alpha,\beta}$-val. Így készítsünk egy $\alpha \to \beta$ utat:

$$\alpha = \omega^0 \to \omega^1 \to ... \to \omega^k = \beta$$

ahol természetesen $\omega^{l+1} = (\omega^l)^b$ valamely b cserére, ekkor

$$(\varphi(\alpha) - \varphi(\beta))^2 = \big(\sum_{l=1}^{k}(\varphi(\omega^{l+1}) - \varphi(\omega^l)\big)^2 = \Big(\sum_{l=1}^{k}\big(\varphi(\omega^{l+1}) - \varphi(\omega^l)\big)^2\Big) +$$

$$+2\sum_{r=0}^{k-1}\big(\varphi(\omega^r) - \varphi(\omega^{r+1})\big)\big(\varphi(\omega^{r+1}) - \varphi(\beta)\big) := N_{\alpha,\beta} + K_{\alpha,\beta}$$

Eszerint a felbontás szerint fogjuk becsülni a tagokat (k=1 esetet azért vizsgáltuk külön, mert ott az út hossza 1, így nincsenek közbülső tagok), a kétszeres szorzatokról belátjuk, hogy az összes konfiguracióra összegezve negatívot adnak, míg a négyzetes tagok alkotta összegben meg fogjuk határozni, hogy egy adott $(\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2$ tag hányszor fordul elő.

Kezdjük a második tag becslésével: ehhez vegyük észre, hogy két konfiguráció csak páros sok helyen különbözhet egymástól. Továbbá ha két konfiguráció $2k$ helyen különbözik, akkor köztük pontosan $(k!)^2$ út vezet, hiszen az első csere k^2 féle lehet, a második $(k-1)^2$ és így tovább. Vizsgáljuk $\sum_{\alpha,\beta} K_{\alpha,\beta}$ összeget, csoportosítsuk a konfiguráció párokat aszerint, hogy hány helyen különböznek egymástól, vagyis A_k halmazokba. Rögzítsük ezen eltérések számát: $2k$. Továbbá ne csak egy úton jussunk el α-ból β-ba hanem az összes lehetségesen, hogy az összeg ne változzon, osszunk az utak számával. Összefoglalva:

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in A_k} \frac{1}{(k!)^2} \sum_{s\in S_{\alpha,\beta}} \sum_{r=0}^{k-1}\big(\varphi(\omega^r) - \varphi(\omega^{r+1})\big)\big(\varphi(\omega^{r+1}) - \varphi(\beta)\big)$$

Fixáljunk egy $\big(\varphi(\omega^r)-\varphi(\omega^{r+1})\big)\big(\varphi(\omega^{r+1})-\varphi(\beta)\big)$ tagot belértve a $\omega^{r+1} = (\omega^r)^b$-et adó b cserét és ω^r-t is és magát r-t is vagyis azt, hogy hányadik helyen történik a b csere. Továbbá s jelölje az ω^i-k által adott $\alpha \to \beta$ utat, azaz azon helyek rendezett sorrendjét ahol csere történt. Az áttekinthetőség kedvéért $\omega^r \equiv \omega$ jelölést használjuk. Ekkor ha $\alpha^b \to \beta^b$-t vizsgáljuk az s úton, akkor $\big(\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega)\big)\big(\varphi(\omega) - \varphi(\alpha^b)\big)$ tagot kapunk. Ugyebár van egy s-sel jelölt utunk:

$$\alpha \to ... \to \omega \to \omega^b \to ... \to \beta$$

Az $\alpha \to \beta$ út, ezt három részre bontjuk: s_1 legyen $\alpha \to \omega$, és legyen s_2 $\omega^b \to \beta$. Induljunk ki β konfigurációból és haladjunk $b \circ s_1$ úton a (ahol $\circ$ az utak egymás után fűzését jelenti), így jussunk el γ-ba:

$$\alpha \ \longrightarrow_{s_1} \ \omega \ \to_b \ \omega^b \ \longrightarrow_{s_2} \ \beta \ \to_b \ \beta^b \ \longrightarrow_{s_1} \ \gamma$$

Így van egy $\gamma \to \omega^b$ utunk: $s_1^{-1} \circ b \circ s_2^{-1}$ és ezen út mentén találjuk

$$\big(\varphi(\beta^b) - \varphi(\beta)\big)\big(\varphi(\beta) - \varphi(\omega^b)\big)$$

tagot, továbbá ha az egész úton végrehajtjuk a b cserét, akkor ugyebár $\gamma^b \to \omega$ utat kapjuk és $\big(\varphi(\beta) - \varphi(\beta^b)\big)\big(\varphi(\beta^b) - \varphi(\omega)\big)$ tagot. Tehát a szummában szereplő tagok négyesével (mint $\alpha \to \beta$, $\alpha^b \to \beta^b$, $\gamma^b \to \omega$, $\gamma \to \omega^b$) csoportosíthatóak, hiszen bármelyik bármelyik tagból indulva a fenti három átalakítást elvégezve a másik három tagot kapjuk. Továbbá minden négyes csoportból minden egyes tag szorzója a szummában azonos, hiszen mindegyik tagban a b csere azonos helyen történik, és ugyanazokat az elemeket cseréljük fel csak esetleg fordított sorrendben. Egy csoporton belüli tagok összege:

$$\big(\varphi(\omega) - \varphi(\omega^b)\big)\big(\varphi(\omega^b) - \varphi(\beta)\big) + \big(\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega)\big)\big(\varphi(\omega) - \varphi(\beta^b)\big) +$$

$$+\big(\varphi(\beta^b)-\varphi(\beta)\big)\big(\varphi(\beta)-\varphi(\omega^b)\big)+\big(\varphi(\beta)-\varphi(\beta^b)\big)\big(\varphi(\beta^b)-\varphi(\omega)\big)=$$

$$=\big(\varphi(\omega)-\varphi(\omega^b)\big)\big(\varphi(\omega^b)-\varphi(\beta)+\varphi(\beta^b)-\varphi(\omega)\big)+$$

$$+\big(\varphi(\beta)-\varphi(\beta^b)\big)\big(\varphi(\omega^b)-\varphi(\beta)+\varphi(\beta^b)-\varphi(\omega)\big)=$$

$$-\big(\varphi(\omega^b)-\varphi(\beta)+\varphi(\beta^b)-\varphi(\omega)\big)^2\leq 0$$

Következésképp a tagok összege minden egyes négyesben negatív, így a négyes csoportokra összegezve is negatívot kapunk. Ezzek bizonyításunk első felét befejeztük, áttérünk az összeg első felének vizsgálatára.

Tehát célunk

$$\sum_{\alpha,\beta}\frac{1}{(k!)^2}\sum_{s\in S_{\alpha,\beta}}\Big(\sum\big(\varphi(\omega^{l+1})-\varphi(\omega^l)\big)^2\Big)$$

összegben megszámoljuk, hogy egy adott $\big(\varphi(\omega^b)-\varphi(\omega)\big)^2$ tag hányszor szerepel. Vegyük észre, hogy minden egyes tag ugyanannyiszor szerepel, hiszen a probléma szimmetrikus, minden egyes konfiguráció egy permutációval egy tetszőleges másikba vihető. Így tulajdonképpen a tagok számát elég meghatároznunk. Bizonyításunk elején definiált A_k halmazok elemszámára

$$|A_k|=\binom{n}{m}\binom{m}{k}\binom{n-m}{k}$$

adódik. Ekkor a tagok száma:

$$\sum_k\sum_{(\alpha,\beta)\in A_k}\frac{1}{(k!)^2}\sum_{s\in S_{\alpha,\beta}}1=\sum_k\binom{n}{m}\binom{m}{k}\binom{n-m}{k}k=$$

$$= \sum_k \binom{n}{m} m \binom{m-1}{k-1}\binom{n-m}{k} = \binom{n}{m} m \sum_k \binom{m-1}{m-k}\binom{n-m}{k} =$$

$$= \binom{n}{m} m \binom{n-1}{m} = \binom{n}{m}^2 \frac{1}{n} m(n-m)$$

A szumma kiszámítása azon az egyszerű kombinatorikai elven alapul, hogy $n-1$ tárgyból úgy választunk ki m darabot, hogy két részre osztjuk a tárgyakat, egy $m-1$-es és egy $n-m$-es csoportra majd esetszétválasztással döntjük el, hogy melyikből mennyit választunk. Továbbá a szummában szerepel egy $\lambda(x)\lambda(y)$ tag, így a $\binom{n}{m}^2$-es szorzó kiesik. Végül a bizonyítandó egyenlőtlenség jobb oldalán is minden tag ugyanannyiszor szerepel, így itt is együttes számukat határozzuk. Ezt úgy kapjuk, hogy kiválasztunk egy w konfigurációt, ez $\binom{n}{m}$ lehetőség, majd egy b cserét, ez $m(n-m)$ lehetőség, persze minden tagot kétszer számoltunk így adódik a bizonyítani kívánt $\sum_\omega \lambda(\omega)\varphi^2(\omega) \leq \frac{1}{4n}\sum_{\omega,b}(\varphi(\omega^{(b)}) - \varphi(\omega))^2\lambda(\omega)$ egyenlőtlenség. □

Az előző bizonyításban még B szerepelt az állításban, mint az összes lehetséges cserék halmaza. Viszont a modell leírásánál a folyamat motivációjaként azt írtuk, hogy elektromos erőtér hatására a pozitív részecskék szomszédos helyekre ugrálva jobbra haladnak. Így B^* jelölje a szomszédos helyeken létrejöhető cserék halmazát, vagyis $B^* = \{(k, k+1) | 1 \leq k \leq n,\ \omega_k = 1, \omega_{k+1} = 0\}$. Ekkor igaz a következő Poincaré egyenlőtlenség:

3.2. Tétel. *[1]*

Minden $\varphi : \Omega_m^n \to \mathbb{R}$ függvény esetén, melyre $\mathbb{E}\varphi = 0$, teljesűl a Poincaré egyenlőtlenség:

$$\sum_{\omega\in\Omega_m^n} \lambda(\omega)\varphi^2(\omega) \leq \frac{n^2}{4} \sum_{\omega\in\Omega_m^n, b\in B^*} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2\lambda(\omega)$$

ahol B^* a fent definiált.

Bizonyítás:

Az előző tétel eredményét fogjuk kihasználni. Elsőként $(\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2$ tagot alakítjuk át: jussunk el ω^b-ből ω-ba (vagy fordítva, amelyik lehetséges) egy úton, hogy közben csak B^*-beli cseréket végzünk.

$$\omega^b := \alpha^k \to ... \to \alpha^0 =: \omega$$

ekkor a Cauchy egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$\big(\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega)\big)^2 = \Big(\sum_{i=0}^{k-1} \big(\varphi(\alpha^{i+1}) - \varphi(\alpha^i)\big)\Big)^2 \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{i=0}^{k-1} 1^2\Big)\Big(\sum_{i=0}^{k-1}(\varphi(\alpha^{i+1}) - \varphi(\alpha^i))^2\Big) \leq n\Big(\sum_{i=0}^{k-1}(\varphi(\alpha^{i+1}) - \varphi(\alpha^i))^2\Big)$$

Vagyis

$$\sum_{\omega\in\Omega_m^n, b\in B} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2 \leq \sum_{\omega\in\Omega_m^n, b\in B} n\Big(\sum_{i=0}^{k-1}(\varphi(\alpha^{i+1}) - \varphi(\alpha^i))^2\Big) \leq$$

$$\leq n^3 \sum_{\omega\in\Omega_m^n, b\in B^*} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2$$

hiszen egy adott $(\varphi(\alpha^{i+1}) - \varphi(\alpha^i))^2$ tag nem szerepelhet többször a fenti szummában mint n^2, hiszen a "vándorló" 1-es részecske kevesebb, mint n helyről indulhatott és kevesebb mint n helyre érkezhet. Ezt összevetve az előző tételünk eredményével:

$$\sum_{\omega\in\Omega_m^n} \lambda(\omega)\varphi^2(\omega) \leq \frac{1}{4n} \sum_{\omega\in\Omega_m^n, b\in B} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2\lambda(\omega) \leq$$

$$\leq \frac{n^2}{4} \sum_{\omega\in\Omega_m^n, b\in B^*} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2\lambda(\omega)$$

adódik, ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

Összefoglalva az eddig látottakat, megállapíthatjuk, hogy a probléma szimmetrizálása, vagyis $L+L^*$ generátorú folyamat vizsgálata, illetve a "távoli" cserék megengedése célravezető volt. Ezt a két lépést a következő fejezetben is alkalmazni fogjuk, viszont mint látni fogjuk a **2.1.** tétel bizonyításában látott ötlet csak részben fog működni.

4. A háromállapotú folyamat

A következőkben ennél bonyolultabb folyamatot fogunk vizsgálni, melyet Fritz József és Tóth Bálint, illetve Fritz József és Nagy Katalin vizsgál 2004-ben valamint 2006-ban megjelent cikkükben [4],[2]. A konfigurációs tér most 3 fajta elemet tartalmaz: $-1, 0, 1$, mindegyikből adott, a folyamat során állandó számú állapot szerepel, így a konfigurációs tér:

$$\Omega^n_{p,m} = \{\omega \mid \sum \omega_k = p - m, \sum \omega_k^2 = p + m\}$$

Gondolhatunk itt pozitív, negatív részecskékre és üres helyekre. A részecskék egy periodikus egyenes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mentén helyezkednek el, továbbá egy erőtér hatására a pozitív töltésű részecskék jobbra, a negatív töltésűek balra mozognak 1-1 rátával, és egy -1-es és $+1$-es részecske helycseréje 2-es rátával történik. Célunk most is ezen folyamat spektrális résének megbecsülése, vagyis a Poincaré egyenlőtlenség igazolása.

Esetünkben is adott λ valószínűségi mérték, az egyenletes eloszlás a $\Omega^n_{p,m}$ altéren: $\lambda(\omega) = \frac{p!m!z!}{n!}$, ahol $z = n - m - p$ jelöli a nullák számát. Vagyis λ egy megmaradási feltételekkel vett egyenletes eloszlás a konfigurációs téren. Legyen φ most is a konfigurációs tér elemein ható függvény:$\varphi : \Omega^n_{p,m} \to \mathbb{R}$, feltehető, hogy $\mathbb{E}\varphi = 0$. Az ω^b jelentse azt a konfiguraciót, amit ω-ból kapunk, ha $b = (k, l)$ állapotokat felcseréljük.

A folyamat generátora a következő:

$$L\varphi = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}(\omega_k^2 + \omega_{k+1}^2 + \omega_k - \omega_{k+1})\big(\varphi(\omega^{(k,k+1)})) - \varphi(\omega)\big)$$

4.1. Állítás. *A fent definiált háromállapotú folyamatra a λ valószínűségi mérték stacionárius.*

Bizonyítás:

Igazolnunk kell, hogy $\sum_{\omega\in\Omega^n_{p,m}} L\varphi(\omega)\lambda(\omega)=0$. A folyamat L generátorának, és λ mértéknek a definíciói szerint:

$$\sum_{\omega\in\Omega^n_{p,m}} L\varphi(\omega)\lambda(\omega)=\lambda(\omega)\sum_{\omega\in\Omega^n_{p,m}}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}(\omega_k^2+\omega_{k+1}^2+\omega_k-\omega_{k+1})\big(\varphi(\omega^{(k,k+1)})-\varphi(\omega)\big)=$$

$$-\lambda(\omega)\sum_{\omega\in\Omega^n_{p,m}}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}(\omega_k^2+\omega_{k+1}^2+\omega_k-\omega_{k+1})\varphi(\omega)+$$

$$+\lambda(\omega)\sum_{\omega\in\Omega^n_{p,m}}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}(\omega_{k+1}^2+\omega_k^2+\omega_{k+1}-\omega_k)\varphi(\omega)=$$

$$\lambda(\omega)\sum_{\omega\in\Omega^n_{p,m}}\sum_{k=0}^{n}(\omega_{k+1}-\omega_k)\varphi(\omega)=0$$

Kihasználtuk, hogy $\lambda(\omega)$ állandó és, hogy $\omega_{n+1}=\omega_1$, így λ valóban stacionárius. $\square$

4.1. Poincaré egyenlőtlenség vizsgálata

Térjünk át a Poincaré egyenlőtlenség vizsgálatára. Az előző fejezetben látott gondolatmenetből indulunk ki, vagyis az $L+L^*$ generátorral rendelkező folyamatot vizsgáljuk, továbbá még a távoli cseréket is megengedjük. Ezzel szimmetrikussá és könnyebben kezelhetővé tesszük a problémát.

$$\left(\frac{L+L^*}{2}\right)\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\big((\omega_k^2+\omega_{k+1}^2+\omega_k-\omega_{k+1})+(\omega_{k+1}^2+\omega_k^2+\omega_{k+1}-\omega_k)\big)\big(\varphi(\omega^{(k,k+1)}))-\varphi(\omega)\big)=$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(\omega_k^2 + \omega_{k+1}^2)\big(\varphi(\omega^{(k,k+1)})) - \varphi(\omega)\big)$$

Vagyis célunk újfent ugyanolyan típusú Poincaré egyenlőtlenség bizonyítása, mint amit az előző fejezetben láttunk, hiszen ha $\omega_k \neq \omega_{k+1}$,akkor

$$\omega_k^2 + \omega_{k+1}^2 > 0$$

A követekő tétel tekinthető a dolgozat fő eredményének.

4.1. Tétel. *Minden $\varphi : \Omega_{p,m}^n \to \mathbb{R}$ függvény esetén, melyre $\mathbb{E}\varphi = 0$, teljesül a Poincaré egyenlőtlenség:*

$$\sum_{\omega \in \Omega_{p,m}^n} \lambda(\omega)\varphi^2(\omega) \leq \frac{2}{n} \sum_{\omega \in \Omega_{p,m}^n, b \in B} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2 \lambda(\omega)$$

ahol $B = \{(k,l) | 1 \leq k, l \leq n\}$ a cserék halmaza.

Bizonyítás:

A három állapotot a könnyebb kezelhetőség kedvéért értelemszerűen $+, 0, -$ szimbólumokkal jelöljük. A bizonyítás szerkezete hasonlít a 0,1 részecskékből álló konfigurációs térnél látottra. Viszont vegyük észre, hogy most az hogy két konfiguráció hány helyen különbözik nem határozza meg a két konfiguráció közt vezető út hosszát:

$$\alpha = (-, -, 0, 0, +, +)$$

$$\beta = (+, +, -, -, 0, 0)$$

$$\gamma = (+, 0, +, -, 0, -)$$

Könnyen látható, hogy mind β, mind γ is 6 helyen különbözik α-tól, viszont $\alpha \to \beta$ út 4 hosszú és $\alpha \to \gamma$ út 3 hosszú, így nem a tagok összeszámolása nem ígérkezik egyszerűnek. Az olyan 3 elemű részkonfigurációkat, melyek rendezéséhez legalább 2 csere szükséges *ciklus*nak fogjuk nevezni. Vegyük észre, hogy a permutációktól eltekintve két fajta ciklus van:

$$|+, 0, -| \to |0, -, +|$$

illetve

$$|+, 0, -| \to |-, +, 0|$$

Az első ciklust *negatív ciklus*nak, a másodikat *pozitív ciklus*nak nevezzük a továbbiakban. Az elnevezés abból ered, hogy a 0 elem helyére $-$ vagy $+$ állapotnak kell kerülnie.

Az utak szerkezete:

Először vizsgáljuk meg adott α és β konfigurációpár közti különbségek szerkezetét, azt, hogy milyen cserékkel lehet egyikből a másikba eljutni:

$$N_{x,y} := \{k|\ \alpha_k = x, \beta_k = y\}$$

és legyenek ezek elemszámai:

$$n_{x,y} := |N_{x,y}|$$

Vezessünk be néhány transzformációt, melyek a konfigurációkon hatnak. $T^b_{(k,l)}$ legyen az a transzformáció, ami ω konfiguráció k. és l. koordinátáján lévő állapotot felcseréli. Vagyis $(T^b_{(k,l)}(\omega))_k = \omega_l$ és $(T^b_{(k,l)}(\omega))_l = \omega_k$ és a többi koordináta nem változik.

$T^{c+}_{(k,l,m)}$ már három elemet változtat és akkor értelmes ha k, l, m állapotok közül egy-egy $+, 0, -$ állapot, és a transzformáció a 0 állapotból $+$, a $+$ állapotból $-$ és a $-$ állapotból 0-át csinál az adott k, l, m koordináta hármason, a többi koordinátát nem változtatja. Például: $T^{c+}_{(2,3,5)}(0{+}{-}{-}0{+}) = 0{-}0{-}{+}{+}$.

$T^{c-}_{(k,l,m)}$ is olyan konfigurációkon értelmezett, ahol k, l, m állapotok közül egy-egy $+, 0, -$ állapot, és a transzformáció a 0 állapotból $-$, a $-$ állapotból $+$ és a $+$ állapotból 0-át csinál az adott k, l, m koordináta hármason, a többi koordinátát nem változtatja. Például $T^{c-}_{(2,3,5)}(0+--0+) = 00+--+$.

Vegyük észre, hogy T^{c+} és T^{c-} transzformációk a ciklusokat hivatottak rendezni, és mindkettő felírható két megfelelő T^b transzformáció szorzataként.

Az előző fejezetben látottakhoz hasonlóan itt is utakat fogunk a konfigurációpárok közt definiálni. Adott α és β konfigurációpár esetén α konfiguráción hajtsuk végre T^b, T^{c+}, T^{c-} transzformációk egy sorozatát, hogy β konfigurációt kapjuk. Méghozzá tesszük ezt úgy, hogy minden egyes koordinátán legfeljebb egyszer hajtunk végre transzformációt. Egy út legyen azon konfigurációk egymásutánja, amiket egy ilyen transzformációsorozat során kapunk. $S_{\alpha,\beta}$ legyen adott α, β párra a megengedett utak halmaza. A könnyebb érthetőség kedvéért hozunk egy példát a transzformációk sorozatára:

$(T^b_{(1,2)} \circ T^{c+}_{(3,4,6)} \circ T^{c-}_{(5,7,10)} \circ T^b_{(8,11)})(+0+00-+0+--) = (0+-+-00-++0)$

és az ehhez tartozó út:

$$\alpha = (+0+00-+0+--) \rightarrow (+0+00-+-+-0) \rightarrow (+0+0--0-++0) \rightarrow$$

$$\rightarrow (+0-+-00-++0) \rightarrow (0+-+-00-++0) = \beta$$

Vegyük észre, hogy mivel a transzformációk egymástól diszjunkt koordinátákat változtatnak meg, a transzformációk felcserélhetőek.

A Poincaré egyenlőtlenség bal oldalának átalakítás

Az előző bizonyítás mintájára:

$$\sum_{\omega \in \Omega^n_{p,m}} \lambda(\omega)\varphi^2(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Omega^n_{p,m}} \sum_{\beta \in \Omega^n_{p,m}} \lambda(\alpha)\lambda(\beta)(\varphi(\alpha) - \varphi(\beta))^2$$

továbbá

$$\alpha = \omega^0 \to \omega^1 \to ... \to \omega^k = \beta$$

úton haladva α-ból β konfigurációba a következő átalakítást hajthatjuk végre:

$$(\varphi(\alpha) - \varphi(\beta))^2 = \big(\sum_{l=1}^{k}(\varphi(\omega^{l+1}) - \varphi(\omega^l)\big)^2 = \sum_{l=1}^{k}\big(\varphi(\omega^{l+1}) - \varphi(\omega^l)\big)^2 +$$

$$+2\sum_{r=0}^{k-1}\big(\varphi(\omega^r) - \varphi(\omega^{r+1})\big)\big(\varphi(\omega^{r+1}) - \varphi(\beta)\big) := N_{\alpha,\beta} + K_{\alpha,\beta}$$

Most is eszerint fogjuk becsülni a tagokat, a kétszeres szorzókról belátjuk, hogy az összes konfigurációra összegezve negatívot adnak, míg a négyzetes tagok alkotta összeget pedig felülről fogjuk becsülni.

A kétszeres szorzatok

Kezdjük a kétszeres szorzatok negatívitásával. Adott α,β konfigurációpár közt készítsük el az összes $S_{\alpha,\beta}$-beli utat, ekkor:

$$\sum_{(\alpha,\beta)}\sum_{s\in S_{\alpha,\beta}}\frac{1}{|S_{\alpha,\beta}|}\sum_{r=0}^{|s|-1}\big(\varphi(\omega^r) - \varphi(\omega^{r+1})\big)\big(\varphi(\omega^{r+1}) - \varphi(\beta)\big) \tag{1}$$

összeg negatívitását fogjuk igazolni, ahol $|s|$ az s út hosszát jelöli. A kétállapotú folyamatnál látott bizonyítás mintájára fixáljunk egy

$$\big(\varphi(\omega^r) - \varphi(\omega^{r+1})\big)\big(\varphi(\omega^{r+1}) - \varphi(\beta)\big) \tag{2}$$

$\omega^{r+1} = T\omega^r$-et adó T transzformációt és ω^r-t is és magát r-t is vagyis azt, hogy hányadik helyen hajtjuk végre a T transzformációt. Az áttekinthetőség kedvéért $\omega^r \equiv \omega$ jelölést használjuk. Újfent négyesével fogjuk csoportosítani a tagokat. Ha $T = T^b_{(k,l)}$ valamely k, l párra, akkor az előző fejezetben látott érvelés továbbra is érvényes. Ha T transzformáció T^{c+} vagy T^{c-} típusú, akkor egy apró változtatásra van szükség:

Van egy s-sel jelölt utunk:

$$\alpha \to ... \to \omega \to T\omega \to ... \to \beta$$

Ekkor létezik egy T_{s_1} transzformáció, ami a fent definiált elemi transzformációk szorzata, hogy $T_{s_1}\alpha = \omega$ tovább egy T_{s_2} transzformáció, szintén elemi transzformációk szorzata, hogy $(T_{s_2} \circ T)\omega = \beta$. Persze ekkor $(T_{s_2} \circ T \circ T_{s_1})\alpha = \beta$ is teljesül. Így az utunkat így is felírhatjuk:

$$\alpha \longrightarrow_{T_{s_1}} \omega \longrightarrow_{T} T\omega \longrightarrow_{T_{s_2}} \beta$$

Ahol a nyilak indexébe az kerül, hogy a konfiguráción milyen transzformációt hajtunk végre.

Most induljunk ki $T\alpha$ konfigurációból és haladjunk $T_{s_2} \circ T^{-1} \circ T_{s_1}$ transzformációsorozat által definiált úton. Ekkor a következő konfigurációkon halad keresztűl az út:

$$T\alpha \longrightarrow_{T_{s_1}} T\omega \longrightarrow_{T} \omega \longrightarrow_{T_{s_2}} T^{-1}\beta$$

Ha $T\alpha$ és $T^{-1}\beta$ közt ezen a fenti úton haladunk, akkor a kétszeres szorzatoknál megjelenik a

$$\big(\varphi(T\omega) - \varphi(\omega)\big)\big(\varphi(\omega) - \varphi(T^{-1}\beta)\big) \tag{3}$$

tag.

Ezek után induljunk ki $(T_{s_2} \circ T)\alpha$ konfigurációból, és haladjunk $T_{s_2}^{-1} \circ T^{-1} \circ T_{s_1}$ transzformáció által definiált úton. Ebben az esetben a következő konfigurációkat érinti az út:

$$(T_{s_2} \circ T)\alpha \longrightarrow_{T_{s_1}} \beta \longrightarrow_{T^{-1}} T^{-1}\beta \longrightarrow_{T_{s_2}^{-1}} \omega$$

Ekkor ha $(T_{s_2} \circ T)\alpha$ és ω közt ezen az úton haladunk, akkor a kétszeres szorzatoknál a következő tag is szerepelni fog:

$$\big(\varphi(\beta) - \varphi(T^{-1}\beta)\big)\big(\varphi(T^{-1}\beta) - \varphi(\omega)\big) \tag{4}$$

Végül ha $T_{s_2}\alpha$ konfigurációból indulunk ki, és $T_{s_2}^{-1} \circ T \circ T_{s_1}$ transzformáció által definiált úton haladunk, akkor a következő konfigurációkon keresztűl halad az út:

$$T_{s_2}\alpha \longrightarrow_{T_{s_1}} T^{-1}\beta \longrightarrow_{T} \beta \longrightarrow_{T_{s_2}^{-1}} T\omega$$

Vagyis ebben az esetben ha $T_{s_2}\alpha$ és $T\omega$ közt a most definiált úton haladunk, akkor a kétszeres szorzatok közt a következő tag is szerepel:

$$\big(\varphi(T^{-1}\beta) - \varphi(\beta)\big)\big(\varphi(\beta) - \varphi(T\omega)\big) \tag{5}$$

Könnyen látható, hogy akármelyik most definiált 4 út egyikéből indultunk volna ki és elvégeztük volna a fenti 3 manipulációt szintén ugyanezeket az utakat és tagokat kaptuk volna. Továbbá nyilván minden egyes tag szorzója azonos. Ekkor a $(2), (3), (4), (5)$ tagok összege:

$$\big(\varphi(\omega) - \varphi(T\omega)\big)\big(\varphi(T\omega) - \varphi(\beta)\big) + \big(\varphi(T\omega) - \varphi(\omega)\big)\big(\varphi(\omega) - \varphi(T^{-1}\beta)\big) +$$

$$+\big(\varphi(T^{-1}\beta) - \varphi(\beta)\big)\big(\varphi(\beta) - \varphi(T\omega)\big) + \big(\varphi(\beta) - \varphi(T^{-1}\beta)\big)\big(\varphi(T^{-1}\beta) - \varphi(\omega)\big) =$$

$$= \big(\varphi(\omega) - \varphi(T\omega)\big)\big(\varphi(T\omega) - \varphi(\beta) + \varphi(T^{-1}\beta) - \varphi(\omega)\big) +$$

$$+\big(\varphi(\beta)-\varphi(T^{-1}\beta)\big)\big(\varphi(T\omega)-\varphi(\beta)+\varphi(T^{-1}\beta)-\varphi(\omega)\big)=$$

$$-\big(\varphi(T\omega)-\varphi(\beta)+\varphi(T^{-1}\beta)-\varphi(\omega)\big)^2\leq 0$$

Így $\sum_{\alpha,\beta} K_{\alpha,\beta}\leq 0$, amit igazolni akartunk, most már áttérhetünk az összeg első tagjának vizsgálatára.

Itt jegyezzük meg, hogy az előző fejezetben látott bizonyítás önmagában nem volt megismételhető, lévén, hogy vannak olyan cserék melyek sorrendje nem felcserélhető, ezt küszöböltük ki T^{c+} és T^{c-} transzfromációk bevezésével.

A négyzetes tagok

Második lépés a

$$Q=\sum_{\alpha,\beta}\frac{1}{|S_{\alpha,\beta}|}\sum_{s\in S_{\alpha,\beta}}\Big(\sum_{l}\big(\varphi(\omega^{l+1})-\varphi(\omega^{l})\big)^2\Big) \tag{6}$$

összeg vizsgálata. Elsőként T^{c+} és T^{c-} transzfromációkat felbontjuk az összes lehetséges módon két-két T transzformáció szorzatára, ezt ugyebár egy transzformációnál 6 féleképpen tehetjük meg. Képletben:

$$\big(\varphi(T^{c+}\omega)-\varphi(\omega)\big)^2=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\big(\varphi((T_{i,2}\circ T_{i,1})\omega)-\varphi(T_{i,1}\omega)+T_{i,1}\varphi(T_{i,1}\omega)-\varphi(\omega)\big)^2\leq$$

$$\frac{2}{6}\sum_{i=1}^{6}\big(\varphi((T_{i,2}\circ T_{i,1})\omega)-\varphi(T_{i,1}\omega)\big)^2+\big(\varphi(T_{i,1}\omega)-\varphi(\omega)\big)^2 \tag{7}$$

ahol $T_{i,2}$ és $T_{i,2}$ megfelelő cseréket jelölik, és a becsléshez a Cauchy-egyenlőtlenséget használtuk. Ezzel a lépéssel tulajdonképpen azt értük el, hogy csak sima párcserékkel kell foglalkoznunk. Így a (6) a következő alakot ölti:

$$Q \leq \sum_{\omega,b} c(\omega,b)\big(\varphi(\omega^b)-\varphi(\omega)\big)^2$$

ahol $c(\omega,b)$ csak ω-tól és b-től függő állandó. Vegyük észre, hogy $c(\omega_1,b_1) = c(\omega_2,b_2)$ ha b_1 és b_2 azonos állapotokat cserélnek fel. Hiszen ha veszünk két tagot: $\big(\varphi(\omega_1^{b_1})-\varphi(\omega_1)\big)^2$ és $\big(\varphi(\omega_2^{b_2})-\varphi(\omega_2)\big)^2$, akkor létezik olyan π permutáció mely ω_1 konfigurációt ω_2-be viszi és b_1 csere is b_2 cserébe megy át. Így ez a permutáció az utak közt, melyek a két kérdéses tagot tartalmazzák, is egy bijekciót ad meg, vagyis a két tag szorzója valóban azonos lesz a fenti összegben.

Felső becslést fogunk adni arra, hogy egy adott $\big(\varphi(\omega^b)-\varphi(\omega)\big)^2$ tag milyen együtthatóval szerepelhet (6)-ban, ehhez elég megbecsülni, hogy hány olyan tag van amelyben a csere b-vel azonos állapotokat cserél. Legyen a b élen történő csere olyan ami $+$ és 0 állapotokat cserél (ezt innentől $(+0)$ cserének hívjuk), más cserékre ugyanez az okoskodás elmondható. Ehhez elsőként vizsgáljuk meg azt, hogy adott α és β közt vezető úton legfeljebb hány $(+0)$ csere van. Minden egyes úthoz tartozik egy koordináta partíció, aszerint, hogy melyik elemeken hajtottunk végre T, T^{c+}, T^{c-} transzformációt. Példa a partíciókra:

$$\alpha := |-,0|0|+,0|+,0|-,0,+|-,+|+|+|0,-,+|+,0,-|$$

$$\beta := |0,-|0|0,+|0,+|+,-,0|+,-|+|+|-,+,0|-,+,0|$$

Ekkor akármilyen utat is tekintünk $(+0)$ cserék száma nem lehet több, mint a

$$|+,0| \qquad |-,0,+| \qquad |+,0,-|$$

$$|0,+| \qquad |+,-,0| \qquad |-,+,0|$$

típusú partíciók számának kétszerese, hiszen az első esetben egy darab $(+0)$ csere történik, a három elemű partícióknál pedig partíciónként a (7) tanulsága szerint legfeljebb 2. Hiszen a (7)-ben szereplő 12 tagű összegben 4 olyan tag van amikor $(+0)$ csere történik, ez a szumma előtti $\frac{2}{6}$-os szorzóval: $\frac{8}{6} \leq 2$. Vagyis a $(+0)$ cserék száma nem több, mint $2(n_{+,0} + n_{0,+})$, és fontos, hogy ez minden egyes α és β közti útra egy magától az úttól független becslés.

Tehát az olyan tagok száma az

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{|S_{\alpha,\beta}|} \sum_{s \in S_{\alpha,\beta}} \left(\sum_{l} \left(\varphi(\omega^{l+1}) - \varphi(\omega^{l})\right)^2 \right)$$

összegben, melyekben a $b = (+0)$ legfeljebb $2W$, ahol:

$$W = \sum_{k} k |\{(\alpha, \beta) | \alpha \text{ és } \beta \text{ párra } k = n_{+0} + n_{0+}\}| \tag{8}$$

hiszen az utak számával osztás és az összes útra összegzés "kiejti" egymást, lévén, hogy a cserék számára az úttól független becslésünk van. A (8)-as kifejezést tovább alakítva, most már hozzávéve a $\frac{1}{2}\lambda(\alpha)\lambda(\beta)$ szorzót is:

$$\lambda(\alpha)\lambda(\beta)W = \mathbb{E}(X)$$

Ahol X valoszínűségi változó két egyenletes eloszlással kiválasztott konfigurációra az olyan koordináták számát jelöli, ahol az egyik konfigurációban $+$ áll, a másikban 0 vagy fordítva. Legyenek $X_1, ..., X_n$ indikátor változók, melyekre $X_i = 1$ ha az egyik konfiguráció az i. koordinátáján $+$ állapot áll a másik konfiguráció i. koordinátáján pedig 0 állapot áll. Legyen $X_i = 0$ minden más esetben. Persze ekkor

$$X = X_1 + ... + X_n$$

és

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{2pz}{n^2}$$

teljesül. Így a várható érték linearitása miatt:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = n\mathbb{E}(X_1) = n\left(\frac{2pz}{n^2}\right) = \frac{2pz}{n}$$

Vagyis egy adott $\big(\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega)\big)^2$ tag, ahol $b = (+0)$, szorzója legfeljebb:

$$c(\omega, b) \leq \frac{\frac{2pz}{n}}{\frac{n!}{p!z!m!}pz} = \frac{2}{n}\lambda(\omega)$$

, hiszen $\frac{n!}{p!z!m!}$ féleképp tudjuk ω konfigurációt megválasztani és pz féleképp a b cserét. Míg a Poincaré egyenlőtlenség jobb oldalán ennek a tagnak a szorzója pont $\frac{2}{n}\lambda(\omega)$, hiszen ω és b is rögzített, így a bizonyítandó egyenlőtlenség jobb oldalán lévő szummában a $\big(\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega)\big)^2$ tag egyszer fordul elő.

Ugyanez a gondolatmenet működik a $(+-)$ és $(0-)$ cserékre is, a három kapott eredményt összevetve adódik, hogy

$$\sum_{\omega \in \Omega_{p,m}^n} \lambda(\omega)\varphi^2(\omega) \leq \frac{2}{n} \sum_{\omega \in \Omega_{p,m}^n, b \in B} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2 \lambda(\omega)$$

amit igazolni akartunk. $\square$

Az előző bizonyításban B-val, az összes lehetséges cserék halmazával dolgoztunk. Viszont a modell leírásánál a folyamat motivációjaként azt írtuk, hogy elektromos erőtér hatására a pozitív töltésű részecskék szomszédos helyekre ugrálva jobbra haladnak, míg a negatív töltésű részecskék balra. Így B^* jelölje a szomszédos helyeken létrejöhető cserék halmazát, vagyis

$$B^* = \{(k, k+1) | 1 \leq k \leq n,\ \omega_k - \omega_{k+1} = 1 \text{ vagy } \omega_k - \omega_{k+1} = 2\}$$

Ekkor igaz a következő Poincaré egyenlőtlenség:

4.2. Tétel. *Minden* $\varphi : \Omega^n_{p,m} \to \mathbb{R}$ *függvény esetén, melyre* $\mathbb{E}\varphi = 0$*, teljesül a Poincaré egyenlőtlenség:*

$$\sum_{\omega \in \Omega^n_{p,m}} \lambda(\omega)\varphi^2(\omega) \le 2n^2 \sum_{\omega \in \Omega^n_{p,m}, b \in B^*} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2 \lambda(\omega)$$

ahol B^* *a fent definiált.*

Bizonyítás:

A tétel bizonyítása azonos a **2.2**. tételben látottakkal. Az előző tétel eredményét fogjuk kihasználni. Elsőként $(\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2$ tagot alakítjuk át: jussunk el ω^b-ből ω-ba (vagy fordítva, amelyik lehetséges) egy úton, hogy közben csak B^*-beli cseréket végzünk, vagyis egy részecske szomszédos helyekre lépkedve "vándorol"

$$\omega^b := \alpha^k \to ... \to \alpha^0 =: \omega$$

a Cauchy-Swartz egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$\big(\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega)\big)^2 = \Big(\sum_{i=0}^{k-1} \big(\varphi(\alpha^{i+1}) - \varphi(\alpha^i)\big)\Big)^2 \le$$

$$\le \Big(\sum_{i=0}^{k-1} 1^2\Big)\Big(\sum_{i=0}^{k-1} (\varphi(\alpha^{i+1}) - \varphi(\alpha^i))^2\Big) \le$$

$$n\Big(\sum_{i=0}^{k-1} (\varphi(\alpha^{i+1}) - \varphi(\alpha^i))^2\Big)$$

Vagyis

$$\sum_{\omega \in \Omega^n_{p,m}, b \in B} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2 \le \sum_{\omega \in \Omega^n_{p,m}, b \in B} n\Big(\sum_{i=0}^{k-1} (\varphi(\alpha^{i+1}) - \varphi(\alpha^i))^2\Big) \le$$

$$\leq n^3 \sum_{\omega \in \Omega^n_{p,m}, b \in B^*} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2$$

hiszen egy adott $(\varphi(\alpha^{i+1}) - \varphi(\alpha^i))^2$ tag nem szerepelhet többször a fenti szummában mint n^2, hiszen a "vándorló" részecske (legyen az 1-es vagy -1-es) kevesebb, mint n helyről indulhatott és kevesebb mint n helyre érkezhet. Felhasználva előző tételünk eredményét:

$$\sum_{\omega \in \Omega^n_{p,m}} \lambda(\omega)\varphi^2(\omega) \leq \frac{2}{n} \sum_{\omega \in \Omega^n_{p,m}, b \in B} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2 \lambda(\omega) \leq$$

$$\leq 2n^2 \sum_{\omega \in \Omega^n_{p,m}, b \in B^*} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2 \lambda(\omega)$$

adódik, ezzel a bizonyítást befejeztük. □

Láthatjuk, hogy az előző fejezetben látott állítások, igaz más konstanssal, továbbra is érvényesek. Ebben a fejezetben bizonyítottuk a háromállapotú modellre a Poincaré egyenlőtlenséget, mely a saját eredményemnek tekinthető. A következő alfejezetben egy hasznosnak tűnő ötletet ismertetek, a *klón*ok bevezetését.

4.2. A többállapotú modell tanulmányozása

Végül ismertetünk gondolatot, mely több állapotú modellek vizsgálatánál hasznos lehet. Célünk az, hogy a háromállapotú modellt egy n állapotú modellre alakítsuk át.

Különböztessük meg egymástól az eddig azonosnak tekintett állapotokat:

$$+_1, ..., +_p, 0_1, ...0_z, -_1, ..., -_m$$

és egy eddigi ω konfigurációnak készítsük el $p!z!m!$ darab *klón*ját, amit úgy kapunk, hogy vesszük az eddigi azonos állapotok egymás közti összes permutációját. Legyenek az így keletkezett klónok: $\omega_1, ..., \omega_{p!z!m!}$ és φ függvényt is terjesszük ki a klónokra: $\varphi(\omega_i) := \varphi(\omega)$. Továbbá a klónokkal kiegészített állapotteret jelöljük Ω_n^n-el. $\tilde{B}$ legyen az összes Ω_n^n téren lehetséges n^2 darab csere halmaza. Ekkor:

Ekkor

$$\sum_{\omega \in \Omega_{p,m}^n} \lambda(\omega)\varphi^2(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Omega_{p,m}^n} \sum_{\beta \in \Omega_{p,m}^n} \lambda(\alpha)\lambda(\beta)(\varphi(\alpha) - \varphi(\beta))^2 =$$

$$\frac{1}{2}\lambda(\alpha)\lambda(\beta)\frac{1}{(p!z!m!)^2} \sum_{\alpha \in \Omega_{p,m}^n} \sum_{\beta \in \Omega_{p,m}^n} \sum_{i=1}^{p!z!m!} \sum_{j=1}^{p!z!m!} (\varphi(\tilde{\alpha}_i) - \varphi(\tilde{\beta}_j))^2 =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(n!)^2} \sum_{\alpha \in \Omega_n^n} \sum_{\beta \in \Omega_n^n} (\varphi(\alpha) - \varphi(\beta))^2$$

Ha a Poincaré egyenlőtlenség jobb oldalát is átírjuk:

$$\frac{c}{n} \sum_{\omega \in \Omega_{p,m}^n, b \in B} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2 \lambda(\omega) =$$

$$= \frac{c}{n}\lambda(\omega)\frac{1}{(p!z!m!)} \sum_{\omega \in \Omega_{p,m}^n, b \in B} \sum_{i=1}^{p!z!m!} \sum_{j=1}^{p!z!m!} (\varphi(\tilde{\omega}_i^b) - \varphi(\tilde{\omega}_i))^2 =$$

$$= \frac{c}{n}\frac{1}{n!} \sum_{\omega \in \Omega_n^n, b \in \tilde{B}} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2$$

Tehát nincs más dolgunk, mint hogy bizonyítsuk

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(n!)^2} \sum_{\alpha \in \Omega_n^n} \sum_{\alpha \in \Omega_n^n} (\varphi(\alpha) - \varphi(\beta))^2 \leq \frac{c}{n}\frac{1}{n!} \sum_{\omega \in \Omega_n^n, b \in \tilde{B}} (\varphi(\omega^b) - \varphi(\omega))^2$$

egyenlőtlenséget, ami egyáltalán nem tűnik egyszerűnek.

Itt jegyzem meg, hogy ez az okoskodás nem használja ki azt, hogy a modell háromállapotú. Az állapotok számától függetlenül a fenti átalakításokkal ugyanerre az eredményre vezet. Vagyis a gondolatmenet több állapotú modellek esetében is használható, hiszen a fent leírtakban tulajdonképpen csak az történik, hogy egy tetszőleges állapotú modellt n állapotúvá alakítjuk át.

5. További kutatási irány: a párkeltéses-irtásos folyamat

Dolgozatomban eddig tárgyalt modellek mindegyikében az egyes típusú részecskék száma a folyamat során nem változott. Egy adott fizikai környezetben nem ritka, hogy az ellentétes töltésű részecskék kiolthatják egymást (gondoljunk csak az ionokból keletkező molekulákra). Vagy fordítva: a semleges töltésű részecskepárból keletkezik két ellentétes töltésű részecske. Következzen a modell pontos leírása: a részecskéink egy dimenzióban mozognak, egy periódikus szakaszon: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ A konfigurációs tér tartalmazzon három féle elemet: -1,0,1. Viszont most már csak egy megmaradó mennyiségünk van az össztöltés: $\Omega_t^n = \{\omega \mid \sum \omega_k = t\}$ A lényeges változás, hogy az eddig megengedett teréken kívűl párkeltés-irtás is történhet: $(1,-1) \leftrightarrow (0,0)$ és $(0,0) \leftrightarrow (1,-1)$. Stacionárius mértéknek újfent megfelel a konfigurációs téren vett egyenletes eloszlás. A problémát nehezíti, hogy modellünkben a $|\Omega_t^n|$-re, vagyis a konfigurációs tér nagyságára, így az egyes konfigurációk mértékére sem adható meg zárt formula. A sejtésünk az, hogy erre a folyamatra is igaz lesz a Poincaré egyenlőtlenség a fent tárgyalt formában, így

$$\sum_{\omega\in\Omega} \lambda(\omega)\varphi^2(\omega) \le \frac{c}{n}\sum_{\omega\in\Omega} \lambda(\omega)\varphi(\omega)L\varphi(\omega)$$

6. Összefoglalás

Dolgozatom kölcsönható részecskerendszerek vizsgálatával foglalkoztam, a cél a Poincaré egyenlőtlenség vizsgálata, és ezzel a spektrális rés becslése volt. Láthattuk, hogy a tárgyalt modellek mindegyike fizikai inditatású. A dolgozat első részében megismertük magát a Poincaré egyenlőtlenséget, és az egyenlőtlenség jelentőségét. Az első tárgyalt modellünk a kizárásos folyamat volt, erre adott bizonyításunk lényegében megegyezik [1] cikkben látottakkal. Majd ezen modellt továbbfejlesztését vizsgáltuk, melyet Fritz József és Nagy Katalin tárgyal [2] 2006-ban megjelent cikkükben. Itt már három állapotot tartalmaz a konfigurációs tér és a folyamatot újfent az egyes elemek cseréi jelentik. Erre a modellre bizonyítottam a Poincaré egyenlőtlenséget, láthattuk, hogy az egyenlőtlenségben szereplő állandó újfent n^2 nagysagrendű. Továbbá dolgozatom végén egy új modellel ismerkedtünk meg, ahol már párkeltés és irtás is történhet és megfogalmaztam további kutatásom irányát.

Hivatkozások

[1] T. Funaki, K. Uchiyama, H.T. Yau (1996): *Hydrodynamic limit for lattice gas reversible under Bernoulli measures.* In Nonlinear Stochastic PDEs (T. Funaki and W. A. Woyczinski, eds) 1-40. Springer, New York

[2] József Fritz, Katalin Nagy (2006): *On uniqueness of the Euler limit of one-component lattice gas models*, ALEA 1, 367-392

[3] Laurent Saloff-Coste (1997): *Lectures on finite Markov chains.* In Lectures on Probability Theory and Statistics, Springer

[4] József Fritz and Bálint Tóth (2004): *Derivation of the Leroux system as the hydrodynamic limit of a two-component latice gas.* Communications in Mathematical Physics, 249 pp. 1-27